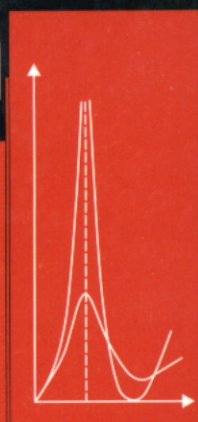
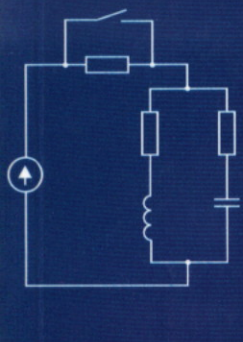


Stanisław Bolkowski
Wiesław Brociek
Henryk Rawa

Teoria obwodów elektrycznych

Zadania



WT

O Autorach:

Stanisław Bolkowski jest profesorem zwyczajnym na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Zajmuje się teorią obwodów elektrycznych i teorią pola magnetycznego. Jest autorem 5 książek oraz współautorem 4 skryptów, 3 książek i Poradnika inżyniera elektryka. Napisał też ponad 70 artykułów i referatów naukowych. Wypromował 7 doktorów i był recenzentem wielu przewodów doktorskich, a także habilitacyjnych. Od kilku kadencji jest członkiem Komitetu Elektrotechniki PAN i przewodniczącym Sekcji Teorii Elektrotechniki tego Komitetu. Jest prezesem Stowarzyszenia Elektryków Polskich.

Wiesław Brociek ma stopień naukowy doktora i jest wieloletnim nauczycielem akademickim na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Zajmuje się teorią obwodów elektrycznych liniowych i nieliniowych. Jest współautorem 3 podręczników oraz autorem i współautorem ponad 50 artykułów i referatów naukowych publikowanych w czasopismach krajowych i zagranicznych. Działa aktywnie w Stowarzyszeniu Elektryków Polskich. Został uhonorowany Srebrną i Złotą Odznaką Honorową SEP i Medalem Profesora Stanisława Fryzego.

Henryk Rawa jest profesorem zwyczajnym na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Jest uznanym specjalistą z elektrotechniki teoretycznej, a zwłaszcza z teorii pola magnetycznego. W swoim dorobku ma 2 monografie naukowe, 2 podręczniki akademickie i ponad 70 artykułów. Jest też współautorem 6 podręczników i skryptów oraz współtwórcą 11 opatentowanych wynalazków. Wypromował 2 doktorów i był recenzentem wielu prac doktorskich, a także habilitacyjnych. Od 2002 roku jest kierownikiem Zakładu Wysokich Napięć na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Jest odznaczony Medalem Komisji Edukacji Narodowej.

Wszelkie uwagi na temat książki prosimy kierować pod adresami:

bolkowski@iem.pw.edu.pl

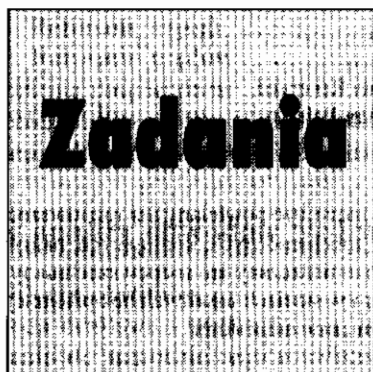
brociek@iem.pw.edu.pl

rawa@iem.pw.edu.pl

352197

Stanisław Bolkowski
Wiesław Brociek
Henryk Rawa

Teoria obwodów elektrycznych



Wydanie piąte

Opiniodawca DR INŻ. MARIAN PASKO
Redaktor INŻ. MACIEJ ŚLISZ
Okładkę i strony tytułowe projektowała EWA BOHUSZ-RUBASZEWSKA
Redaktor techniczny BARBARA CHOJNACKA-FLISIUK
Skład i łamanie TTEKO TEMPCZYK & TEMPCZYK S.C.

© Copyright by Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
Warszawa 1995, 2003

All Rights Reserved
Printed in Poland

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych, w tym również nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Adres poczty elektronicznej: wnt@pol.pl
Strona WWW: www.wnt.com.pl



ISBN 83-204-2863-7

853864

E.2023/03

Spis treści

Przedmowa	7
------------------	----------

1. Obwody elektryczne w stanie ustalonym	9
---	----------

1.1. Obwody elektryczne przy wymuszeniu stałym	9
1.2. Obwody elektryczne przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennym w funkcji czasu	20
1.3. Przekształcenia równoważne struktur obwodowych	36
1.4. Charakterystyki częstotliwościowe obwodów	44
1.4.1. Rezonans napięć	44
1.4.2. Rezonans prądów	54
1.5. Sprzężenia magnetyczne	61
1.6. Przebiegi odkształcone w obwodach elektrycznych	75
1.7. Zadania do samodzielnego rozwiązania	83

2. Metody analizy obwodów złożonych	90
--	-----------

2.1. Topologia obwodów	90
2.2. Metoda oczkowa i węzłowa	97
2.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	110

3. Czwórniki	114
---------------------	------------

3.1. Czwórniki pasywne	114
3.2. Czwórniki aktywne	131
3.3. Filtry częstotliwościowe	157
3.3.1. Filtry pasywne	157
3.3.2. Filtry aktywne	171

4. Obwody trójfazowe	182
4.1. Obwody trójfazowe symetryczne	182
4.2. Obwody trójfazowe niesymetryczne	190
4.3. Pomiar mocy w układach trójfazowych	204
4.4. Kompensacja mocy biernej	213
4.5. Składowe symetryczne	215
4.6. Wyższe harmoniczne w układach trójfazowych	229
4.7. Zadania do samodzielnego rozwiązania	239
5. Obwody elektryczne w stanie nieustalonym	247
5.1. Ustalanie warunków początkowych	247
5.2. Metoda klasyczna	249
5.3. Metoda operatorowa	253
5.4. Metoda zmiennych stanu	272
5.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania	281
6. Modelowanie i symulacja komputerowa obwodów elektrycznych	284
6.1. Modelowanie równań algebraicznych strukturami obwodowymi	284
6.2. Modelowanie równań różniczkowych zwyczajnych strukturami obwodowymi	298
6.3. Symulacja komputerowa obwodów elektrycznych	307
6.3.1. Podstawowe informacje o programie NAP	307
6.3.2. Analiza stałoprądowa	318
6.3.3. Analiza obwodów przy wymuszeniach zespolonych	325
6.3.4. Analiza obwodów w dziedzinie czasu	337
Literatura	356

Przedmowa

W książce zamieszczono ponad trzysta przykładów rozwiązywania różnych zagadnień z teorii obwodów elektrycznych.

Szczególnie dużo miejsca poświęcono zadaniom ukazującym metodykę: analizy stanów nieustalonych, analizy częstotliwościowej, obliczania obwodów trójfazowych, analizy topologicznej złożonych obwodów elektrycznych. Wiele przykładów ilustruje metodykę analizy układów zawierających źródła sterowane, w tym również czwórniki aktywne. W odrębny rozdział ujęto zagadnienia modelowania obwodowego równań algebraicznych i różniczkowych oraz metodykę analizy obwodów elektrycznych przy użyciu programu symulacyjnego PC NAP.

Dla większości zadań podano szczegółowe rozwiązania, a niekiedy — komentarz objaśniający sens fizyczny lub techniczny rozważanych zagadnień. Niektóre z zawartych w książce zadań mają jednak podaną tylko odpowiedź; takie zadania Czytelnik musi, niestety, rozwiązać sam. W kilku rozdziałach zadania do samodzielnego rozwiązania wydzielono w postaci odrębnego podrozdziału. Jedynie w rozdziałach 3 i 6 uczyniono odstępstwo od tej zasady, grupując przykłady o podobnej tematyce bez względu na to, czy podano sposób ich rozwiązania, czy też tylko odpowiedź. Taki sposób prezentowania wyników zarówno ze specyfiki tematyki rozdziałów 3 i 6, jak i z konieczności posługiwania się bardziej zróżnicowanymi metodami analizy — często stosowanymi do rozwiązywania ściśle określonych problemów.

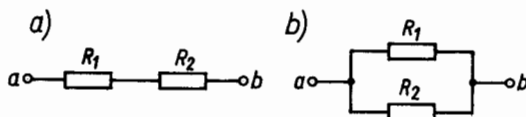
Autorzy i Wydawnictwa Naukowo-Techniczne mają nadzieję, że studenci wydziałów elektrycznych i elektroniki często sięgną po ten właśnie zbiór zadań. Pisany i wydany został bowiem z myślą o ułatwieniu samodzielnej nauki przedmiotu, jakim jest *teoria obwodów elektrycznych*.

1

Obwody elektryczne w stanie ustalonym

1.1. Obwody elektryczne przy wymuszeniu stałym

1.1. Rezystancja wypadkowa dwóch rezystancji połączonych szeregowo (rys. 1.1a) jest równa 25Ω , a połączonych równolegle (rys. 1.1b) 4Ω . Obliczyć wartości poszczególnych rezystancji.



Rys. 1.1

ROZWIĄZANIE. Przy połączeniu szeregowym rezystancja wypadkowa

$$R_{w1} = R_1 + R_2 = 25 \Omega$$

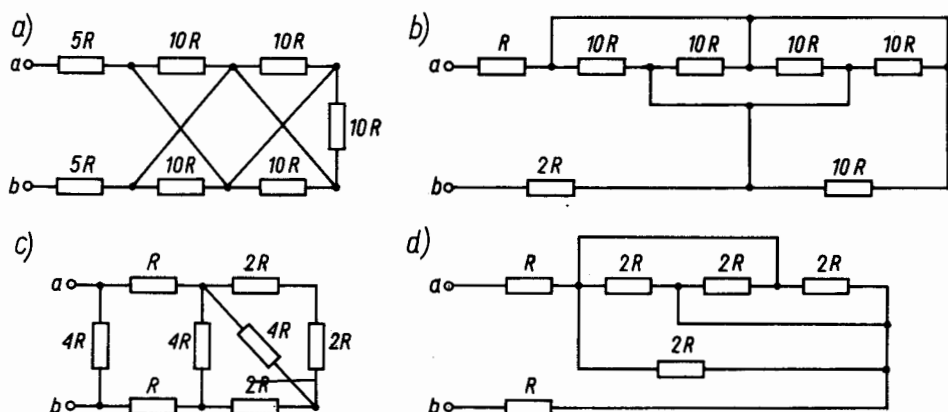
Przy połączeniu równoległym rezystancja wypadkowa

$$R_{w2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4 \Omega$$

Dokonując obliczeń, otrzymujemy

$$R_1 = 5 \Omega \quad \text{oraz} \quad R_2 = 20 \Omega$$

1.2. Obliczyć rezystancję zastępczą widzianą z zacisków a-b obwodów, których schematy przedstawiono na rys. 1.2.



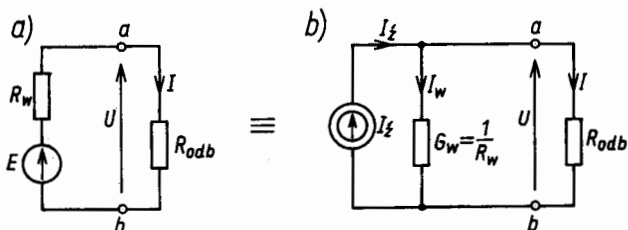
Rys. 1.2

ROZWIĄZANIE. Rezystancje są następujące:

a) $R_{ab} = 5R + \frac{10R}{5} + 5R = 12R$ c) $R_{ab} = 2R$

b) $R_{ab} = R + \frac{10R}{5} + 2R = 5R$ d) $R_{ab} = R + 0,5R + R = 2,5R$

1.3. Obliczyć parametry źródła prądowego równoważnego rzeczywistemu źródłu napięcia (rys. 1.3a) o parametrach: $E = 30 \text{ V}$, $R_w = 2 \Omega$. Obliczyć sprawność obydwu źródeł, jeżeli $R_{odb} = 3 \Omega$. Dla jakiej wartości R_{odb} wystąpi dopasowanie odbiornika do źródła?



Rys. 1.3

ROZWIĄZANIE

a) Dla rzeczywistego źródła napięcia:

— prąd zwarcia

$$I_{zw} = \frac{E}{R_w} = \frac{30}{2} = 15 \text{ A}$$

— prąd w obwodzie

$$I = \frac{E}{R_w + R_{odb}} = \frac{30}{2 + 3} = 6 \text{ A}$$

— napięcie na odbiorniku

$$U = R_{odb} I = 3 \cdot 6 = 18 \text{ V}$$

— napięcie na rezystancji wewnętrznej źródła

$$U_w = R_w I = 2 \cdot 6 = 12 \text{ V}$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = R_{odb} I^2 = R_{odb} \left(\frac{E}{R_w + R_{odb}} \right)^2 = 3 \cdot 6^2 = 108 \text{ W}$$

— moc tracona na rezystancji wewnętrznej

$$P_w = R_w I^2 = 2 \cdot 6^2 = 72 \text{ W}$$

— moc wytwarzana przez źródło

$$P = EI = \frac{E^2}{R_w + R_{odb}} = 180 \text{ W}; \quad P = P_w + P_{odb}$$

Sprawność źródła napięcia η_u jest równa stosunkowi mocy P_{odb} pobieranej przez odbiornik do mocy P wytwarzanej przez źródło

$$\eta_u = \frac{P_{odb}}{P} = \frac{R_{odb}}{R_{odb} + R_w} = 0,6$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = P - P_w = EI - R_w I^2$$

Przyrównując pochodną mocy względem prądu do zera

$$\frac{dP_{odb}}{dI} = E - 2R_w I = 0$$

otrzymujemy wartość prądu, przy której moc odbiornika jest maksymalna

$$I' = \frac{E}{2R_w} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ A}$$

Zatem, przy $R_{odb} = R_w$ wystąpi dopasowanie odbiornika do źródła napięcia stałego. Wydziela się wówczas w odbiorniku moc maksymalna

$$P_{odb \max} = \frac{E^2}{4R_w} = \frac{900}{8} = 112,5 \text{ W}$$

Moc źródła przy dopasowaniu odbiornika do źródła napięcia

$$P' = EI' = 30 \cdot 7,5 = 225 \text{ W}$$

Sprawność przy dopasowaniu odbiornika do źródła napięcia, tzn. przy przesyłaniu największej mocy

$$\eta'_u = \frac{P_{\text{odb max}}}{P'} = \frac{R_w}{2R_w} = 0,5$$

Oznacza to, że połowa mocy wytworzonej przez źródło jest dostarczana do odbiornika, a połowa jest tracona na rezystancji wewnętrznej R_w . Układy elektroenergetyczne nigdy nie pracują w takich warunkach, tzn. nie przesyłają mocy maksymalnej, gdyż ze względów ekonomicznych nie można dopuścić do tak dużych strat energii. Niektóre odbiory telekomunikacyjne pracują natomiast w pobliżu dopasowania odbioru, bowiem energia przesyłana bywa tak mała, że straty mają niewielkie znaczenie.

b) Na rysunku 1.3b przedstawiono rzeczywiste źródło prądu równoważne rzeczywistemu źródłu napięcia przedstawionemu na rys. 1.3a. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa dla schematu z rys. 1.3a możemy napisać

$$E = (R_w + R_{\text{odb}})I = R_w I + R_{\text{odb}} I = R_w I + U$$

Dzieląc obustronnie przez R_w powyższe równanie (przy założeniu, że $R_w \neq 0$), otrzymujemy

$$\frac{E}{R_w} = I + \frac{U}{R_w}$$

lub

$$I_z = I + I_w$$

Równaniu temu odpowiada schemat przedstawiony na rys. 1.3b, przy czym:

$I_z = \frac{E}{R_w}$ — prąd zwarcia źródła napięcia, równy prądowi idealnego źródła

prądu; $I_w = \frac{U}{R_w} = G_w U$ — prąd płynący przez konduktancję G_w ; I — prąd płynący przez odbiornik.

Źródło napięcia o rezystancji wewnętrznej różnej od zera może być zawsze zastąpione przez źródło prądu. W obu przypadkach na zaciskach odbiornika jest to samo napięcie U , a przez odbiornik płynie ten sam prąd I . Idealne źródło napięcia ($R_w = 0$) nie ma równoważnego sobie idealnego źródła prądu i odwrotnie. Źródła idealne stosowane w schematach obwodów elektrycznych stanowią zawsze przybliżenie źródeł rzeczywistych.

Dla rzeczywistego źródła prądu:

— prąd źródła prądowego

$$I_z = \frac{E}{R_w} = \frac{30}{2} = 15 \text{ A}$$

— napięcie na odbiorniku

$$U = \frac{I_z}{G_w + G_{odb}} = \frac{15}{0,5 + 0,333} = 18 \text{ V}$$

— prądy I_w oraz I wynoszą odpowiednio

$$I_w = \frac{U}{R_w} = G_w U = 0,5 \cdot 18 = 9 \text{ A}$$

$$I = I_z - I_w = 15 - 9 = 6 \text{ A}$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = G_{odb} U^2 = \frac{1}{3} \cdot 18^2 = 108 \text{ W}$$

— moc tracona na konduktancji G_w

$$P_w = G_w U^2 = \frac{1}{2} \cdot 18^2 = 162 \text{ W}$$

— moc wytwarzana przez źródło

$$P = U I_z = 18 \cdot 15 = 270 \text{ W}; \quad P = P_w + P_{odb}$$

Sprawność źródła prądu η_i jest równa stosunkowi mocy P_{odb} pobieranej przez odbiornik do mocy P wytwarzanej w źródle

$$\eta_i = \frac{P_{odb}}{P} = \frac{108}{270} = 0,4$$

Moc pobierana przez odbiornik o konduktancji $G_{odb} = \frac{1}{R_{odb}}$

$$P_{odb} = G_{odb} \left(\frac{I_z}{G_w + G_{odb}} \right)^2$$

Postępując analogicznie do przypadku zasilania odbiornika ze źródła napięcia, otrzymujemy wartość mocy maksymalnej $P_{odb \max}$ dla $G_{odb} = G_w = \frac{1}{2} S$ (dopasowanie odbiornika do źródła prądu)

$$P_{odb \max} = \frac{I_z^2}{4 G_w} = 112,5 \text{ W}$$

Wówczas moc źródła

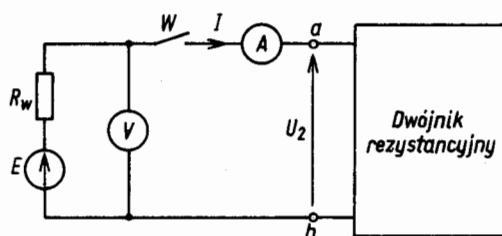
$$P' = U I_z = \frac{I_z^2}{2 G_w} = 225 \text{ W}$$

Sprawność przy dopasowaniu odbiornika do źródła prądu, tzn. przy przesyle największej mocy

$$\eta_i = \frac{P_{odb \max}}{P'} = 0,5$$

Porównując sprawność źródła napięcia η_u ze sprawnością źródła prądu η_i w schematach zastępczych tego samego źródła energii stwierdzamy, że $\eta_u = \eta_i$ tylko dla $R_w = R_{odb}$. Sprawności rozważanych źródeł napięcia i prądu stałego są sobie równe tylko w stanie dopasowania.

1.4. Wyznaczyć wartość źródła napięcia E , rezystancji wewnętrznej R_w oraz rezystancji zastępczej R_z pasywnego dwójnika rezystancyjnego na podstawie pomiarów w stanach ustalonych (rys. 1.4). Przy otwartym wyłączniku woltomierz wskazywał $U_{V1} = 200 \text{ V}$, amperomierz $I_{A1} = 0$. Przy zamkniętym wyłączniku wskazania odpowiednio wynosiły $U_{V2} = 180 \text{ V}$, $I_{A2} = 10 \text{ A}$.



Rys. 1.4

ROZWIĄZANIE. Z pomiaru przy otwartym wyłączniku wynika, że $E = 200 \text{ V}$. Przy zamkniętym wyłączniku

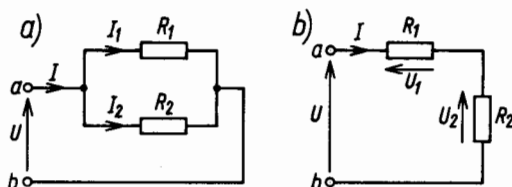
$$U_2 = R_z I_2 = E - R_w I_2$$

Wstawiając dane liczbowe, otrzymujemy

$$R_z = \frac{U_2}{I_2} = \frac{180}{10} = 18 \Omega$$

$$R_w = \frac{E - U_2}{I_2} = \frac{200 - 180}{10} = 2 \Omega$$

1.5. Dobrać wartość rezystancji R_2 w taki sposób, aby w obwodzie przedstawionym na rys. 1.5a prąd I_1 wynosił $0,8I$, a w obwodzie na rys. 1.5b napięcie U_1 było równe $0,8U$. Rezystancja $R_1 = 100 \Omega$.



Rys. 1.5

ROZWIĄZANIE

a) Obwód z rys. 1.5a opisują równania

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{stąd} \quad I_2 = I - I_1 = 0,2I$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = U$$

ostatecznie

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{0,2I}{0,8I} = \frac{1}{4}$$

Rozpływ prądów w gałęziach równoległych jest odwrotnie proporcjonalny do wartości rezystancji tych gałęzi, stąd rezystancja

$$R_2 = 4R_1 = 400 \, \Omega$$

b) Obwód z rys. 1.5b opisują równania

$$U = U_1 + U_2 \quad \text{stąd} \quad U_2 = U - U_1 = 0,2U$$

$$U_1 = R_1 I \quad \text{oraz} \quad U_2 = R_2 I$$

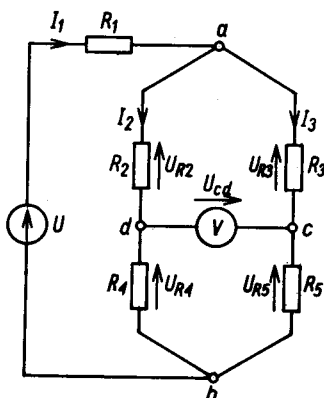
ostatecznie

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 I}{R_2 I} = \frac{R_1}{R_2} = 4$$

Spadki napięć w obwodzie szeregowym są wprost proporcjonalne do wartości rezystancji, na których spadki te występują. Rezystancja R_2 wynosi

$$R_2 = \frac{R_1}{4} = 25 \, \Omega$$

1.6. Źródło napięcia stałego $U = 60 \, \text{V}$ zasila obwód przedstawiony na rys. 1.6.



Rys. 1.6

Wartości rezystancji wynoszą: $R_1 = 18 \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$, $R_5 = 20 \Omega$. Wyznaczyć wartości prądów gałęziowych, wskazania woltomierza oraz sporządzić bilans mocy w obwodzie (założyć, że woltomierz jest idealny).

ROZWIĄZANIE. Rezystancja wypadkowa obwodu

$$R_w = R_1 + \frac{(R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 18 + \frac{20 \cdot 30}{50} = 30 \Omega$$

Prąd wejściowy

$$I_1 = \frac{U}{R_w} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A}$$

Napięcia w gałęziach równoległych możemy obliczyć z zależności

$$U_{ab} = R_{ab} I_1 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ V}$$

lub

$$U_{ab} = U - R_1 I_1 = 60 - 18 \cdot 2 = 24 \text{ V}$$

Prądy gałęziowe

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2 + R_4} = \frac{24}{20} = 1,2 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3 + R_5} = \frac{24}{30} = 0,8 \text{ A}$$

Woltomierz mierzy napięcie

$$U_{cd} = U_{R2} - U_{R3} = U_{R5} - U_{R4} = 4 \text{ V}$$

Sprawdzimy bilans mocy w obwodzie. Zgodnie z zasadą bilansu mocy, moc dostarczona przez źródło równa się mocy pobranej przez odbiornik.

Moc źródła

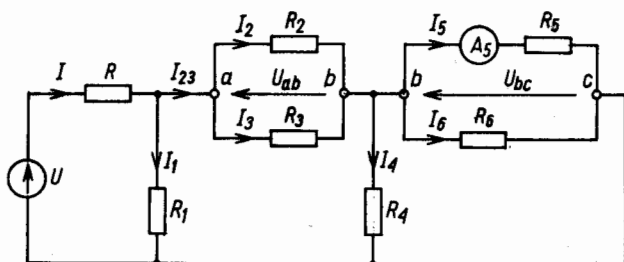
$$P = U I_1 = 60 \cdot 2 = 120 \text{ W}$$

Moc odbiornika

$$\begin{aligned} P_{\text{odb}} &= R_1 I_1^2 + (R_2 + R_4) I_2^2 + (R_3 + R_5) I_3^2 = \\ &= 18 \cdot 4 + 20 \cdot 1,2^2 + 30 \cdot 0,8^2 = 120 \text{ W} \end{aligned}$$

Otrzymujemy $P = P_{\text{odb}}$, zatem zasada bilansu jest spełniona.

1.7. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.7 wskazanie amperomierza wynosi $I_5 = 2 \text{ A}$, a wartości rezystancji są równe $R = 6 \Omega$, $R_1 = 18 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 20 \Omega$, $R_6 = 10 \Omega$. Obliczyć wartości napięcia i prądu wejściowego.



Rys. 1.7

ROZWIĄZANIE. Mając dany prąd w gałęzi zawierającej rezystancję R_5 , możemy obliczyć napięcie U_{bc} oraz prądy gałęziowe I_4 i I_6

$$U_{bc} = R_5 I_5 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ V}$$

$$I_6 = \frac{U_{bc}}{R_6} = \frac{40}{10} = 4 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{U_{bc}}{R_4} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$$

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła b otrzymujemy

$$I_{23} = I_4 + I_5 + I_6 = 8 \text{ A}$$

Napięcie U_{ab} obliczamy z zależności

$$U_{ab} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} I_{23} = \frac{5 \cdot 20}{25} 8 = 32 \text{ V}$$

Napięcie U_{ac} zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$U_{ac} = U_{ab} + U_{bc} = 32 + 40 = 72 \text{ V}$$

Prąd I_1 oraz prąd wejściowy I wynoszą odpowiednio

$$I_1 = \frac{U_{ac}}{R_1} = \frac{72}{18} = 4 \text{ A}$$

$$I = I_1 + I_{23} = 4 + 8 = 12 \text{ A}$$

Napięcie wejściowe

$$U = U_{ac} + RI = 72 + 6 \cdot 12 = 144 \text{ V}$$

Rezystancja wejściowa obwodu

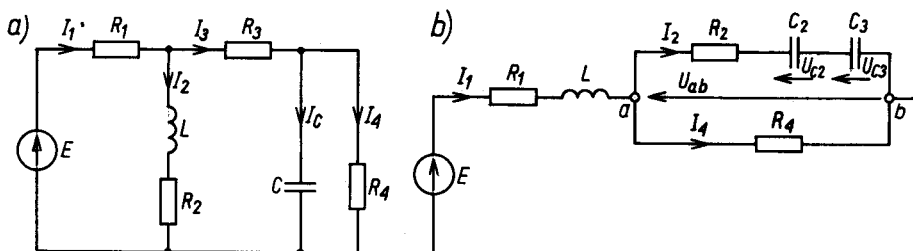
$$R_{we} = \frac{U}{I} = \frac{144}{12} = 12 \Omega$$

1.8. Do napięcia źródłowego $E = 150 \text{ V}$ dołączono obwód przedstawiony na:

a) rys. 1.8a o parametrach: $R_1 = 18 \Omega$, $R_2 = R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 40 \mu\text{F}$;

b) rys. 1.8b o parametrach: $R_1 = R_2 = 50 \Omega$, $R_4 = 100 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $C_2 = 40 \mu\text{F}$, $C_3 = 60 \mu\text{F}$.

Obliczyć prądy gałęziowe oraz napięcia na poszczególnych kondensatorach.



Rys. 1.8

ROZWIĄZANIE

a) W obwodzie przedstawionym na rys. 1.8a prąd I_1 wynosi

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{150}{18 + 12} = 5 \text{ A}$$

Reaktancja cewki $X_L = 2\pi fL$ dla wymuszeń stałych ($f=0$) jest równa zero ($X_L = 0$), zatem cewka stanowi zwarcie. Reaktancja kondensatora $X_C = 1/2\pi fC$ dla wymuszeń stałych dąży do nieskończoności ($X_C \rightarrow \infty$), zatem kondensator stanowi przerwę, a prąd $I_C = 0$.

Prądy gałęziowe wynoszą

$$I_2 = \frac{E - R_1 I_1}{R_2} = \frac{150 - 18 \cdot 5}{20} = 3 \text{ A}$$

$$I_3 = I_4 = \frac{E - R_1 I_1}{R_3 + R_4} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A}$$

Napięcie na kondensatorze C

$$U_C = R_4 I_4 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ V}$$

b) W obwodzie na rys. 1.8b prądy są równe

$$I_1 = I_4 = \frac{E}{R_1 + R_4} = \frac{150}{50 + 100} = 1 \text{ A}$$

$$I_2 = 0$$

Napięcie na gałęziach równoległych

$$U_{ab} = R_4 I_4 = 100 \text{ V}$$

Przy szeregowo połączonych kondensatorach ładunki są jednakowe $Q_2 = Q_3 = Q$, zatem

$$U_{ab} = U_{C_2} + U_{C_3} = \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left(\frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3} \right)$$

Po wykonaniu przekształceń

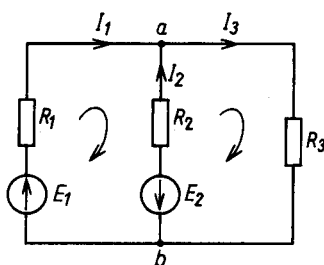
$$Q = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} U_{ab} = \frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-6}} 100 = 24 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

Napięcia na kondensatorach C_2 i C_3 wynoszą odpowiednio

$$U_{C_2} = \frac{Q}{C_2} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{40 \cdot 10^{-6}} = 60 \text{ V}$$

$$U_{C_3} = \frac{Q}{C_3} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{60 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ V}$$

1.9. Wyznaczyć rozpyływ prądów w gałęziach obwodu przedstawionego na rys. 1.9. Napięcia źródłowe wynoszą: $E_1 = 80 \text{ V}$, $E_2 = 64 \text{ V}$, a rezystancje: $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$. Sporządzić bilans mocy w obwodzie.



Rys. 1.9

ROZWIĄZANIE. Oznaczamy zwroty prądów w gałęziach. Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła a otrzymamy

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Przyjmujemy zwroty obiegowe oczek i piszemy równania zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$E_1 + E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

$$-E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$$

W wyniku rozwiązania układu równań otrzymujemy następujące wartości prądów: $I_1 = 14 \text{ A}$, $I_2 = -15 \text{ A}$, $I_3 = -1 \text{ A}$. Zwroty prądów są przyjmowane dowolnie i dlatego może okazać się, że rzeczywiste zwroty prądów w gałęziach są przeciwne do założonych. Tak jest w przypadku prądów I_2 oraz I_3 , które mają znak minus.

Sprawdźmy bilans mocy w obwodzie

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$$

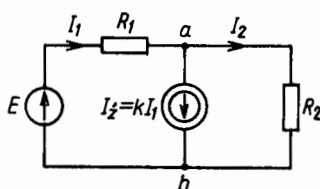
Po podstawieniu wartości liczbowych

$$80 \cdot 14 + 64 \cdot 15 = 6 \cdot 14^2 + 4 \cdot (-15)^2 + 4 \cdot (-1)^2$$

$$2080 = 2080$$

Zasada bilansu mocy jest spełniona.

1.10. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.10 obliczyć rozpyływ prądów. Dane: $E = 30 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $I_z = k I_1$, $k = 2$.



Rys. 1.10

ROZWIĄZANIE. Dla węzła a zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa mamy

$$I_1 = k I_1 + I_2 = 2 I_1 + I_2 \quad \text{stąd} \quad I_2 = -I_1$$

Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa otrzymujemy równanie

$$E = R_1 I_1 + R_2 I_2 = -R_1 I_2 + R_2 I_2$$

stąd

$$I_2 = \frac{E}{R_2 - R_1} = \frac{30}{30 - 20} = 3 \text{ A}$$

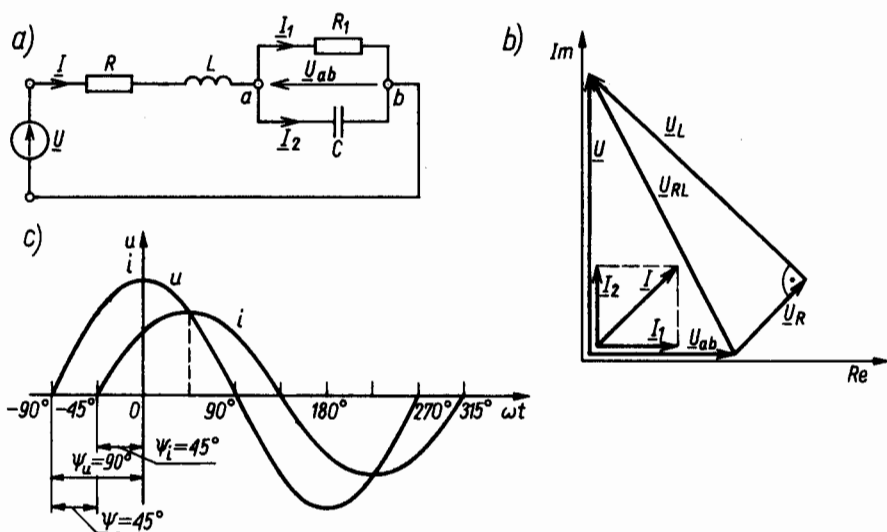
oraz

$$I_1 = -I_2 = -3 \text{ A}$$

1.2. Obwody elektryczne przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennym w funkcji czasu

1.11. Do obwodu przedstawionego na rys. 1.11a przyłożono napięcie o wartości chwilowej $u = 200 \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$ i pulsacji $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Rezystancje $R = 20 \Omega$, $R_1 = 40 \Omega$, indukcyjność $L = 60 \text{ mH}$, a pojemność

$C = 25 \mu\text{F}$. Obliczyć rozpyły prądów i kąt między napięciem a prądem wejściowym oraz sporządzić bilans mocy w obwodzie. Wykonać wykres wektorowy prądów i napięć.



Rys. 1.11

ROZWIĄZANIE. Reaktancje indukcyjne i pojemnościowe wynoszą odpowiednio

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 60 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 40 \Omega$$

Impedancja zastępcza obwodu

$$\begin{aligned} \underline{Z}_z &= R + jX_L + \frac{R_1(-jX_C)}{R_1 - jX_C} = \\ &= 20 + j60 + 20 - j20 = 40 + j40 = 40\sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega \end{aligned}$$

Wartość skuteczna zespolona prądu wejściowego

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_z} = \frac{j200}{40 + j40} = \frac{200e^{j90^\circ}}{40\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = (2,5 + j2,5) = 2,5\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ A}$$

Spadki napięć na rezystancji R i indukcyjności L wynoszą odpowiednio

$$\underline{U}_R = R\underline{I} = 20(2,5 + j2,5) = 50 + j50 = 50\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_L = jX_L\underline{I} = j60(2,5 + j2,5) = -150 + j150 = 150\sqrt{2} e^{j135^\circ} \text{ V}$$

i w postaci czasowej

$$u_R(t) = 100 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 300 \sin(1000t + 135^\circ) \text{ V}$$

Napięcie na rezystancji jest w fazie z prądem, a napięcie na indukcyjności wyprzedza prąd o 90° . Suma geometryczna tych napięć

$$\underline{U}_{RL} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = -100 + j200 = 223,6 e^{j117^\circ} \text{ V}$$

$$u_{RL}(t) = 223,6 \sqrt{2} \sin(1000t + 117^\circ) \text{ V}$$

W celu obliczenia prądów gałęziowych należy wyznaczyć napięcie $\underline{U}_{ab}$ z zależności

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_{ab} \underline{I} = \frac{R_1(-jX_C)}{R_1 - jX_C} \underline{I} = (20 - j20)(2,5 + j2,5) = 100 e^{j0} \text{ V}$$

lub

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U} - (R + jX_L) \underline{I} = j200 - (20 + j60)(2,5 + j2,5) = 100 e^{j0} \text{ V}$$

Prądy gałęziowe wynoszą

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{-jX_C} = \frac{100}{-j40} = 2,5 e^{j90^\circ} \text{ A}$$

Prąd płynący przez rezystancję R_1 jest w fazie z napięciem $\underline{U}_{ab}$, a prąd w gałęzi z pojemnością wyprzedza to napięcie o 90° .

Postacie czasowe prądów

$$i(t) = 2,5 \sqrt{2} \sqrt{2} \sin(1000t + 45^\circ) = 5 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_1(t) = 2,5 \sqrt{2} \sin 1000t \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2,5 \sqrt{2} \sin(1000t + 90^\circ) \text{ A}$$

Na rysunku 1.11b przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć obwodu z rys. 1.11a. Na rysunku 1.11c przedstawiono przebiegi czasowe napięcia i prądu wejściowego. Kąt między napięciem a prądem wejściowym $\psi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. O wartości kąta przesunięcia między napięciem a prądem wejściowym decyduje charakter i wartość impedancji zastępczej $\underline{Z}_z$ obwodu.

W rozpatrywanym przypadku

$$\underline{Z}_z = 40 + j40 = 40 \sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega$$

Impedancja $\underline{Z}_z$ ma wartość dodatnią reaktancji, co świadczy o charakterze indukcyjnym obwodu; argumentem tej impedancji jest kąt 45° (kąt o jaki napięcie wejściowe wyprzedza prąd wejściowy).

Sprawdźmy bilans mocy w obwodzie. Zgodnie z zasadą bilansu mocy — moc dostarczona przez źródło równa się mocy pobranej przez odbiornik.

Moc pozorną źródła w postaci zespolonej

$$\begin{aligned}\underline{S} &= P + jQ = \underline{U} \underline{I}^* = 200e^{j90^\circ} \cdot 2,5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = \\ &= 500\sqrt{2}e^{j45^\circ} = (500 + j500) \text{ V}\cdot\text{A}\end{aligned}$$

Wobec tego moc czynna i bierna źródła

$$P = 500 \text{ W}; \quad Q = 500 \text{ var}$$

Moc pozorną

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 500\sqrt{2} \text{ V}\cdot\text{A}$$

Moc bierna jest dodatnia, gdyż impedancja zastępcza ma charakter indukcyjny. Moc czynna i bierna pobrana przez odbiornik wynosi odpowiednio

$$P_o = RI^2 + R_1 I_1^2 = 20(2,5\sqrt{2})^2 + 40(2,5)^2 = 500 \text{ W}$$

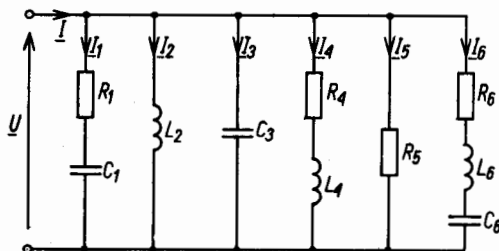
$$Q_o = X_L I^2 - X_C I_2^2 = 60(2,5\sqrt{2})^2 - 40(2,5)^2 = 500 \text{ var}$$

W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$P = P_o; \quad Q = Q_o$$

Zatem zasada bilansu mocy jest spełniona.

1.12. Parametry obwodu przedstawionego na rys. 1.12 wynoszą: $R_1 = 3 \Omega$, $X_{C1} = 2 \Omega$, $X_{L2} = 4 \Omega$, $X_{C3} = 4 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $X_{L4} = 2 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $R_6 = 7 \Omega$, $X_{L6} = 2 \Omega$, $X_{C6} = 2 \Omega$; prąd $\underline{I}_3 = 1 \text{ A}$. Obliczyć admitancję zastępczą obwodu, wartości skuteczne prądów w gałęziach, wartość skuteczną napięcia na zaciskach oraz moc pobieraną przez obwód.



Rys. 1.12

ROZWIĄZANIE. Obliczymy admitancje zespolone poszczególnych gałęzi

$$\underline{Y}_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} + j \frac{X_{C1}}{Z_1^2} = \left(\frac{3}{13} + j \frac{2}{13} \right) S$$

$$\underline{Y}_2 = -j \frac{1}{X_{L2}} = -j \frac{1}{4} S$$

$$\underline{Y}_3 = j \frac{1}{X_{C3}} = j \frac{1}{4} S$$

$$\underline{Y}_4 = \frac{R_4}{Z_4^2} - j \frac{X_{L4}}{Z_4^2} = \left(\frac{3}{13} - j \frac{2}{13} \right) S$$

$$\underline{Y}_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{5} S$$

$$\underline{Y}_6 = \frac{1}{\underline{Z}_6} = \frac{1}{7 + j(2 - 2)} = \frac{1}{7} S$$

Admitancja zastępcza obwodu

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 = \\ &= \frac{3}{13} + j \frac{2}{13} - j \frac{1}{4} + j \frac{1}{4} + \frac{3}{13} - j \frac{2}{13} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = 0,8 S \end{aligned}$$

Admitancja zastępcza obwodu ma więc charakter rzeczywisty.

Napięcie na zaciskach obwodu

$$\underline{U} = -j X_{C3} \underline{I}_3 = -j 4 \cdot 1 = -j 4 V$$

Wartość skuteczna napięcia wynosi $U = 4 V$.

Prądy w poszczególnych gałęziach w postaci zespolonej wynoszą

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U} = \left(\frac{3}{13} + j \frac{2}{13} \right) (-j 4) = \left(\frac{8}{13} - j \frac{12}{13} \right) A$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U} = \left(-j \frac{1}{4} \right) (-j 4) = -1 A$$

$$\underline{I}_3 = 1 A \text{ — z założenia}$$

$$\underline{I}_4 = \underline{Y}_4 \underline{U} = \left(\frac{3}{13} - j \frac{2}{13} \right) (-j 4) = \left(-\frac{8}{13} - j \frac{12}{13} \right) A$$

$$\underline{I}_5 = \underline{Y}_5 \underline{U} = \frac{1}{5} (-j 4) = -j \frac{4}{5} A$$

$$\underline{I}_6 = \underline{Y}_6 \underline{U} = \frac{1}{7} (-j 4) = -j \frac{4}{7} A$$

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa prąd całkowity

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5 + \underline{I}_6 = -j3,2 \text{ A}$$

a jego wartość skuteczna (moduł)

$$I = 3,2 \text{ A}$$

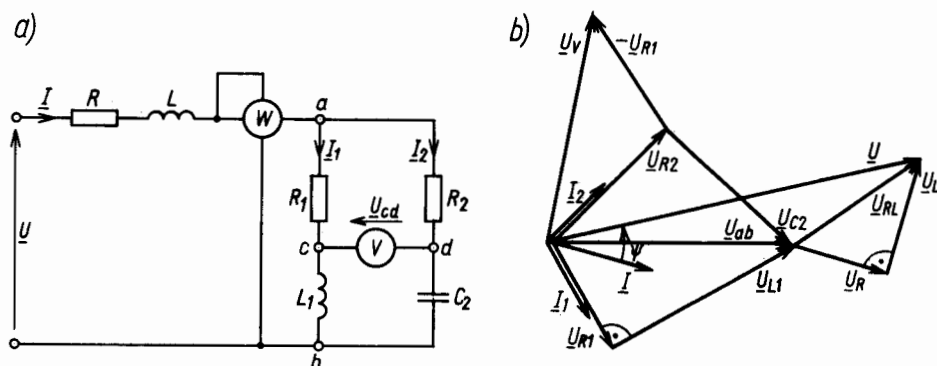
Moc pozorna w postaci zespolonej

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \underline{I}^* = (-j4)(j3,2) = 12,8 \text{ V} \cdot \text{A}$$

Część urojona mocy pozornej zespolonej jest równa zero, a zatem całkowita moc bierna pobierana przez układ jest równa zero ($Q = 0$) i wówczas moc czynna

$$P = 12,8 \text{ W}$$

1.13. Parametry obwodu przedstawionego na rys. 1.13a wynoszą: $\underline{Z} = R + jX_L = (20 + j20) \Omega$, $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = (20 + j40) \Omega$, $\underline{Z}_2 = R_2 - jX_{C2} = (40 - j40) \Omega$. Prąd $\underline{I}_2 = 2e^{j45^\circ} \text{ A}$. Obliczyć wartość napięcia zasilającego, wskazanie woltomierza i watomierza oraz kąt między napięciem i prądem wejściowym. Wykonać wykres wektorowy.



Rys. 1.13

ROZWIĄZANIE. Napięcie na gałęziach równoległych

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= (R_2 - jX_{C2}) \underline{I}_2 = (40 - j40)(\sqrt{2} + j\sqrt{2}) = \\ &= 40\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \cdot 2e^{j45^\circ} = 80\sqrt{2} e^{j0^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

zatem z prawa Ohma

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_1 + jX_{L1}} = \frac{80\sqrt{2} e^{j0^\circ}}{20 + j40} = \frac{80\sqrt{2}}{20\sqrt{5} e^{j63^\circ}} = 2,53 e^{-j63^\circ} \text{ A}$$

Dla węzła a zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa prąd wejściowy

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1,15 - j2,25 + \sqrt{2} + j\sqrt{2} = \\ &= 2,56 - j0,84 = 2,7e^{-j18^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

w postaci czasowej

$$i(t) = 2,7\sqrt{2} \sin(\omega t - 18^\circ) \text{ A}$$

Prąd $\underline{I}$ wywołuje spadki napięć

$$\underline{U}_R = R \underline{I} = 20 \cdot 2,7e^{-j18^\circ} = 54e^{-j18^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_L = jX_L \underline{I} = 20e^{j90^\circ} \cdot 2,7e^{-j18^\circ} = 54e^{j72^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{RL} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = 68 + j34,7 = 76,4e^{j27^\circ} \text{ V}$$

Napięcie zasilające zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$\underline{U} = \underline{U}_{RL} + \underline{U}_{ab} = 68 + j34,7 + 112,8 = 180,8 + j34,7 = 184e^{j11^\circ} \text{ V}$$

w postaci czasowej

$$u(t) = 184\sqrt{2} \sin(\omega t + 11^\circ) \text{ V}$$

Kąt między napięciem i prądem wejściowym

$$\psi = \psi_u - \psi_i = 11^\circ - (-18^\circ) = 29^\circ$$

Napięcie wyprzedza prąd o kąt 29° , więc obwód ma charakter indukcyjny.

Wykres wektorowy prądów i napięć jest przedstawiony na rys. 1.13b.

Napięcie $\underline{U}_{cd}$ obliczamy z zależności

$$\begin{aligned}\underline{U}_{cd} &= \underline{U}_{L1} - \underline{U}_{C2} = \underline{U}_{R2} - \underline{U}_{R1} = R_2 \underline{I}_2 - R_1 \underline{I}_1 = \\ &= 40 \cdot 2e^{j45^\circ} - 20 \cdot 2,53e^{-j63^\circ} = 33,6 + j101,6 = 107e^{j71^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

Woltomierz wskazuje napięcie $U_V = 107 \text{ V}$.

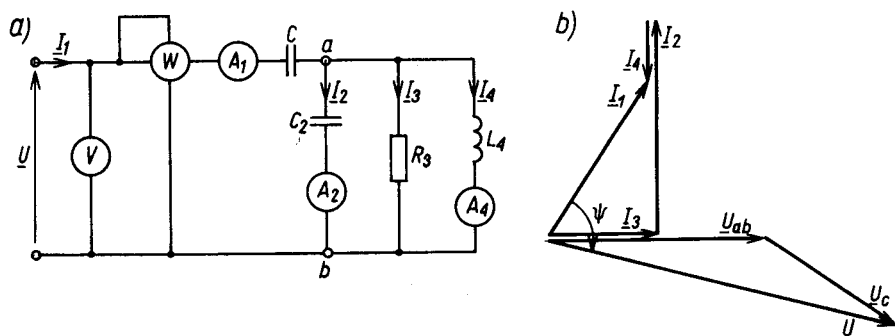
Watomierz mierzy moc czynną

$$\begin{aligned}P &= \operatorname{Re}(\underline{U}_{ab} \underline{I}^*) = [\operatorname{Re}(\underline{Z}_{ab})] I^2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = \\ &= 20 \cdot 2,53^2 + 40 \cdot 2^2 = 288 \text{ W}\end{aligned}$$

1.14. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.14a, $R_3 = X_C = 20 \Omega$, a prąd $\underline{I}_3 = 3 \text{ A}$. Wskazania amperomierzy wynoszą: $I_{A2} = 6 \text{ A}$, $I_{A4} = 2 \text{ A}$. Obliczyć wartości X_{C2} , X_{L4} , wskazania amperomierza A_1 , woltomierza i watomierza oraz wykonać wykres wektorowy prądów i napięć. Określić charakter obwodu.

ROZWIĄZANIE. Napięcie na gałęziach równoległych

$$\underline{U}_{ab} = R_3 \underline{I}_3 = 60e^{j0^\circ} \text{ V}$$



Rys. 1.14

Z prawa Ohma obliczamy wartości reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej odpowiednio

$$X_{L1} = \frac{U_{ab}}{I_4} = \frac{60}{2} = 30 \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{U_{ab}}{I_2} = \frac{60}{6} = 10 \Omega$$

Prąd $\underline{I}_2$ wyprzedza napięcie $\underline{U}_{ab}$ o 90° , a prąd $\underline{I}_4$ opóźnia się względem napięcia $\underline{U}_{ab}$ o 90° . Prądy te mają postacie wykładnicze

$$\underline{I}_2 = 6e^{j90^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_4 = 2e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

Prąd wejściowy w postaci zespolonej

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 3 + j6 - j2 = 3 + j4 = 5e^{j53^\circ} \text{ A}$$

w postaci czasowej

$$i_1(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 53^\circ) \text{ A}$$

Amperomierz A_1 wskazuje wartość $I_{A1} = 5 \text{ A}$.

Woltomierz mierzy napięcie wejściowe

$$\begin{aligned} \underline{U} &= -jX_C \underline{I}_1 + \underline{U}_{ab} = -j20(3 + j4) + 60 = \\ &= 140 - j60 = 152,3e^{-j23^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

zatem wskazanie woltomierza wynosi

$$U_V = \sqrt{140^2 + 60^2} = 152,3 \text{ V}$$

Watomierz mierzy moc

$$P = \text{Re}(\underline{U} \underline{I}_1^*) = \text{Re}[(140 - j60)(3 - j4)] = 180 \text{ W}$$

Watomierz mierzy moc czynną, jaka wydzieli się na rezystancji R_3

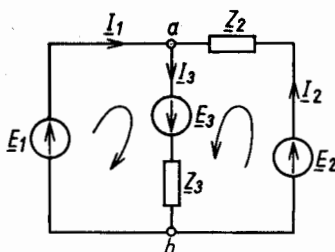
$$P_{R3} = R_3 I_3^2 = 20 \cdot 9 = 180 \text{ W}$$

Kąt między napięciem i prądem wejściowym

$$\psi = \psi_u - \psi_i = -23^\circ - 53^\circ = -76^\circ$$

Zatem napięcie opóźnia się względem prądu o kąt 76° , a więc obwód ma charakter pojemnościowy.

1.15. Napięcia źródłowe obwodu przedstawionego na rys. 1.15 wynoszą: $\underline{E}_1 = 100 \text{ V}$, $e_2 = 200 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$, $\underline{E}_3 = j100 \text{ V}$, a impedancje: $\underline{Z}_2 = (10 - j10) \Omega$, $\underline{Z}_3 = (10 + j10) \Omega$. Obliczyć rozpyły prądów stosując prawa Kirchhoffa.



Rys. 1.15

ROZWIĄZANIE. Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła a otrzymujemy

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Przyjmujemy zwroty obiegowe oczek i piszemy równania zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3$$

$$\underline{E}_2 + \underline{E}_3 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3$$

Z równania pierwszego wyznaczamy prąd $\underline{I}_3$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_1 + \underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{100 + j100}{10 + j10} = 10 \text{ A}$$

Odejmując stronami równanie pierwsze od równania drugiego, otrzymujemy

$$\underline{E}_2 - \underline{E}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$

stąd

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{E}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{100 + j100 - 100}{10 - j10} = \frac{j100}{10(1 - j1)} = (-5 + j5) \text{ A}$$

Zatem prąd $\underline{I}_1$ wynosi

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = 10 + 5 - j5 = (15 - j5) \text{ A}$$

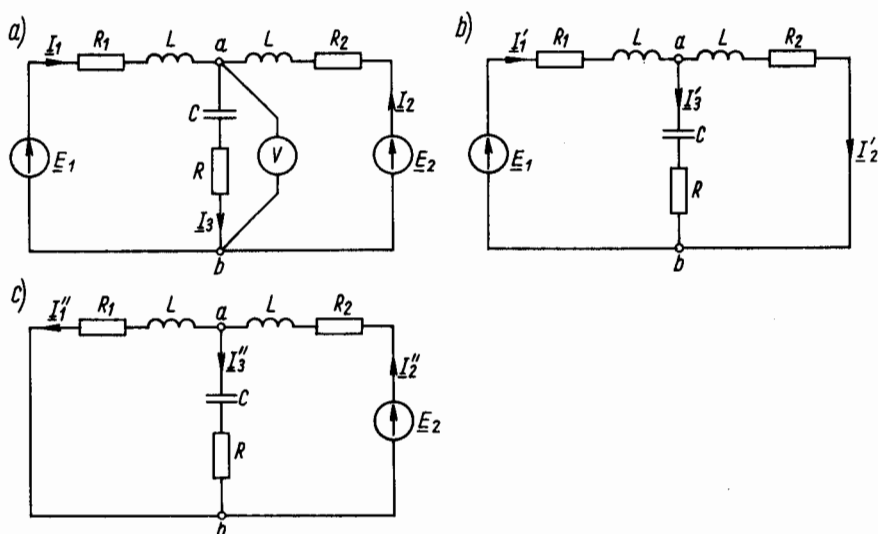
Wartości chwilowe poszczególnych prądów

$$i_1(t) = 10\sqrt{5} \sin(\omega t - 18^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 10 \sin(\omega t + 135^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$$

1.16. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.16a obliczyć rozptyw prądów oraz wskazanie woltomierza. Dane: $R = R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $X_L = X_C = 10 \Omega$, $\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = 100 \text{ V}$.



Rys. 1.16

ROZWIĄZANIE. Rozptyw prądów obliczamy korzystając z zasady superpozycji.

a) Obliczamy wartości prądów od źródła $\underline{E}_1$ (rys. 1.16b)

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + jX_L + \frac{(R_2 + jX_L)(R - jX_C)}{R_2 + jX_L + R - jX_C}} = \frac{100}{10 + j10 + 10} = (4 - j2) \text{ A}$$

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_2 + jX_L} = \frac{\underline{Z}_{ab} \underline{I}'_1}{R_2 + jX_L} = \frac{10(4 - j2)}{10 + j10} = (1 - j3) \text{ A}$$

$$\underline{I}'_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R - jX_C} = \frac{20(2 - j)}{10(1 - j)} = (3 + j1) \text{ A}$$

b) Obliczamy wartości prądów od źródła $\underline{E}_2$ (rys. 1.16c)

$$\underline{I}_2'' = \frac{\underline{E}_2}{R_2 + jX_L + \frac{(R_1 + jX_L)(R - jX_C)}{R_1 + jX_L + R - jX_C}} = (4 - j2) \text{ A}$$

$$\underline{I}_1'' = \frac{(4 - j2)10}{10 + j10} = (1 - j3) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3'' = \frac{(4 - j2)10}{10 - j10} = (3 + j1) \text{ A}$$

Przyjmując zwroty prądów zgodnie z rys. 1.16a, otrzymujemy

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' - \underline{I}_1'' = 4 - j2 - 1 + j3 = (3 + j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' - \underline{I}_2'' = 4 - j2 - 1 + j3 = (3 + j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_3' + \underline{I}_3'' = (6 + j2) \text{ A}$$

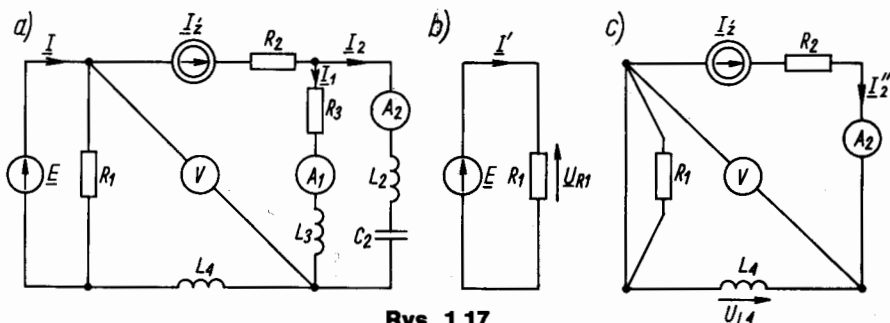
Prąd $\underline{I}_3$ wywołuje spadek napięcia

$$\underline{U}_{ab} = (R - jX_C) \underline{I}_3 = (6 + j2)(10 - j10) = (80 - j40) \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza

$$U_V = \sqrt{80^2 + 40^2} = 89,4 \text{ V}$$

1.17. Obliczyć wskazania przyrządów w obwodzie przedstawionym na rys. 1.17a. Dane: $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$, $X_{L2} = X_{L3} = X_{L4} = 10 \Omega$, $X_{C2} = 10 \Omega$, $e = 100 \sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, $i_z = 5 \sqrt{2} \cos \omega t \text{ A}$.



Rys. 1.17

ROZWIĄZANIE. Korzystamy z zasady superpozycji. Schemat obwodu przy wymuszeniu napięciowym podano na rys. 1.17b, a przy wymuszeniu prądowym na rys. 1.17c.

Zgodnie ze schematem z rys. 1.17b

$$\underline{U}_{R1} = \underline{E} = 100 \text{ V}; \quad \underline{I}_1' = 0; \quad \underline{I}_2' = 0$$

Zgodnie ze schematem z rys. 1.17c prąd $\underline{I}_z$ popłynie przez rezystancję R_2 oraz gałąź L_2, C_2 o reaktancji $X = X_{L2} - X_{C2} = 0$. W wyniku przepływu prądu powstanie napięcie

$$\underline{U}_{L4} = jX_{L4} \underline{I}_z = 10e^{j90^\circ} \cdot 5e^{j90^\circ} = -50 \text{ V}; \quad \underline{I}'_1 = 0; \quad \underline{I}''_2 = \underline{I}_z$$

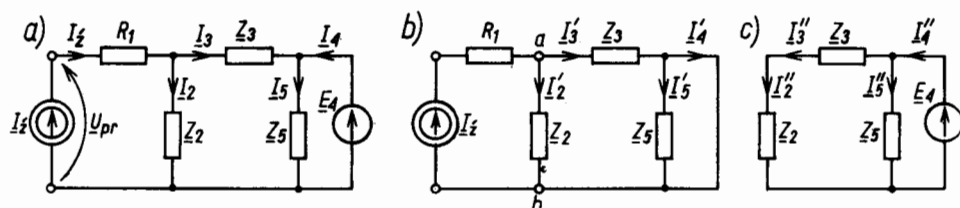
Wskazanie woltomierza w obwodzie na rys. 1.17a

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{R1} - \underline{U}_{L4} = 100 + 50 = 150 \text{ V}$$

Wskazania amperomierzy

$$I_{A1} = 0; \quad I_{A2} = 5 \text{ A}$$

1.18. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.18a obliczyć moc źródła prądowego i napięciowego. Dane: $i_z = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$, $\underline{E}_4 = (100 + j100) \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $\underline{Z}_2 = (10 - j10) \Omega$, $\underline{Z}_3 = (10 + j10) \Omega$, $\underline{Z}_5 = 50 \Omega$.



Rys. 1.18

ROZWIĄZANIE. Stosujemy zasadę superpozycji. Obliczamy rozptyw prądów:

— od źródła prądowego (rys. 1.18b)

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{(\underline{Z}_2 \underline{Z}_3) \underline{I}_z}{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{Z}_2} = \frac{50e^{j90^\circ}}{10 - j10} = (-2,5 + j2,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}'_4 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{50e^{j90^\circ}}{10 + j10} = (2,5 + j2,5) \text{ A} \quad \text{oraz} \quad \underline{I}'_5 = 0$$

— od źródła napięciowego (rys. 1.18c)

$$\underline{I}''_2 = \underline{I}''_3 = \frac{\underline{E}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{100 + j100}{20} = (5 + j5) \text{ A}$$

$$\underline{I}''_5 = \frac{\underline{E}_4}{\underline{Z}_5} = \frac{100 + j100}{50} = (2 + j2) \text{ A}$$

$$\underline{I}''_4 = \underline{I}''_3 + \underline{I}''_5 = (7 + j7) \text{ A}$$

Przyjmując zwroty prądów zgodnie z rys. 1.18a, otrzymujemy

$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2 = -2,5 + j2,5 + 5 + j5 = (2,5 + j7,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_3 - \underline{I}''_3 = 2,5 + j2,5 - 5 - j5 = (-2,5 - j2,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}'_5 + \underline{I}''_5 = (2 + j2) \text{ A}$$

$$\underline{I}_4 = -\underline{I}'_4 + \underline{I}''_4 = -2,5 - j2,5 + 7 + j7 = (4,5 + j4,5) \text{ A}$$

Moc pozorna w postaci zespolonej źródła prądowego

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underline{U}_{pr} \underline{I}_2^* = (R_1 \underline{I}_2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2) 5e^{-j90^\circ} = \\ &= [20 \cdot j5 + (10 - j10)(2,5 + j7,5)](-j5) = (750 - j500) \text{ V} \cdot \text{A} \end{aligned}$$

Zatem moc czynna i bierna źródła prądowego wynoszą odpowiednio

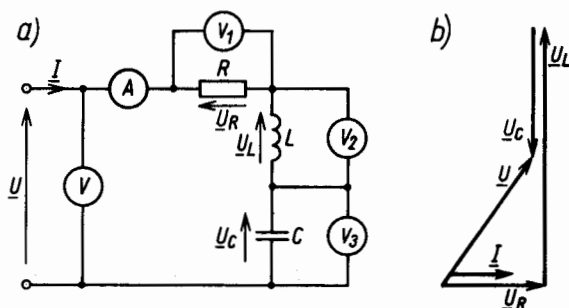
$$P_1 = 750 \text{ W}; \quad Q_1 = -500 \text{ var}$$

Moc pozorna w postaci zespolonej źródła napięciowego

$$\underline{S}_2 = \underline{E}_4 \underline{I}_4^* = (100 + j100)(4,5 - j4,5) = 900 \text{ V} \cdot \text{A}$$

Zatem moc czynna źródła napięciowego $P_2 = 900 \text{ W}$, a moc bierna źródła $Q_2 = 0$.

1.19. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.19a wskazanie amperomierza wynosi 5 A, a wskazania woltomierzy: $U_{V1} = 30 \text{ V}$, $U_{V2} = 100 \text{ V}$, $U_{V3} = 60 \text{ V}$; częstotliwość napięcia $f = 50 \text{ Hz}$. Obliczyć wskazania woltomierzy, jeżeli częstotliwość wzrosła czterokrotnie, a wartość prądu w obwodzie nie uległa zmianie.



Rys. 1.19

ROZWIĄZANIE

a) Dla częstotliwości $f = 50 \text{ Hz}$ wartości rezystancji i reaktancji wynoszą odpowiednio

$$R = \frac{U_{V1}}{I} = 6 \Omega; \quad X_L = \frac{U_{V2}}{I} = 20 \Omega; \quad X_C = \frac{U_{V3}}{I} = 12 \Omega$$

Impedancja obwodu

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 6 + j8 = 10e^{j53^\circ} \Omega$$

Wskazanie woltomierza na zaciskach wejściowych dwójnika RLC , zgodnie z wykresem wektorowym przedstawionym na rys. 1.19b, wynosi

$$U_V = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ V}$$

lub

$$U_V = ZI = 10 \cdot 5 = 50 \text{ V}$$

b) Czterokrotny wzrost częstotliwości powoduje czterokrotny wzrost reaktancji indukcyjnej oraz czterokrotne zmniejszenie reaktancji pojemnościowej, a wartość rezystancji nie ulega zmianie. Zatem

$$R = 6 \Omega; \quad X'_L = 4X_L = 80 \Omega; \quad X'_C = \frac{X_C}{4} = 3 \Omega$$

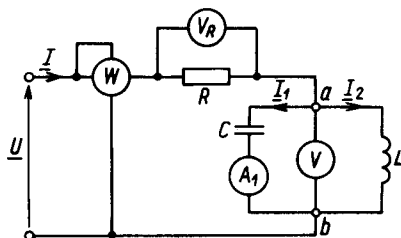
Ponieważ wartość prądu nie uległa zmianie, to wskazania wynoszą

$$U_{V1} = RI = 30 \text{ V}; \quad U_{V2} = X'_L I = 400 \text{ V}; \quad U_{V3} = X'_C I = 15 \text{ V}$$

oraz

$$U_V = \sqrt{U_R^2 + (U'_L - U'_C)^2} = \sqrt{30^2 + 385^2} = 386 \text{ V}$$

1.20. Jak zmieniają się wskazania przyrządów w obwodzie przedstawionym na rys. 1.20, jeżeli przy niezmienionym napięciu zasilania do cewki powietrznej zostanie wprowadzony rdzeń ferromagnetyczny (cewka pozostaje nadal linio-wa)? W rozważaniach pominąć straty w rdzeniu oraz przyjąć, że bez rdzenia i po jego wprowadzeniu $X_C > X_L$.



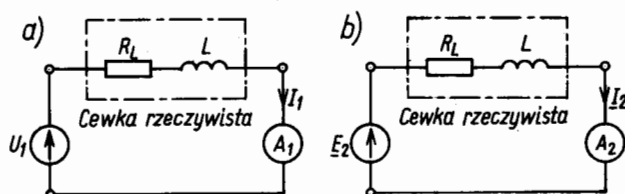
Rys. 1.20

ROZWIĄZANIE. Po wprowadzeniu do cewki powietrznej rdzenia ferromagnetycznego zwiększa się indukcyjność, a zatem i reaktancja indukcyjna X_L . Susceptancja gałęzi $a-b$ zmniejsza się, co wynika z wyrażenia

$$B_{ab} = |B_C - B_L|$$

Zatem zarówno impedancja gałęzi $Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{1}{B_{ab}}$, jak i impedancja całego obwodu $Z = \sqrt{R^2 + Z_{ab}^2}$ zwiększają się. Wskutek tego zmienia się prąd w obwodzie oraz zmniejszają się wskazania woltomierza V_R , gdyż $U_{VR} = RI$, i watomierza W , ponieważ $P = RI^2$. Z zależności $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_{ab}$ wynika, że jeśli $\underline{U} = \text{const}$, to obniżenie napięcia U_R powoduje wzrost napięcia U_{ab} , a w konsekwencji i zwiększenie wskazań amperomierza A_1 .

1.21. W celu wyznaczenia rezystancji i reaktancji cewki rzeczywistej włączono ją do źródła napięcia stałego $U_1 = 20 \text{ V}$ i wówczas popłynął prąd $I_1 = 8 \text{ A}$ (rys. 1.21a). Następnie włączono tę cewkę do źródła napięcia sinusoidalnego o wartości skutecznej $E_2 = 20 \text{ V}$, częstotliwości $f = 50 \text{ Hz}$ i wówczas popłynął prąd o wartości skutecznej $I_2 = 1,6 \text{ A}$ (rys. 1.21b). Obliczyć wartość rezystancji R_L oraz indukcyjność L tej cewki.



Rys. 1.21

ROZWIĄZANIE

a) Przy wymuszeniu napięciem stałym indukcyjność jest zwarta, zatem możemy obliczyć rezystancję tej cewki z prawa Ohma

$$R_L = \frac{U_1}{I_1} = \frac{20}{8} = 2,5 \, \Omega$$

b) Na podstawie pomiaru przy wymuszeniu sinusoidalnym możemy obliczyć moduł impedancji tej cewki

$$Z_L = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} = \frac{E_2}{I_2} = \frac{20}{1,6} = 12,5 \, \Omega$$

Zatem

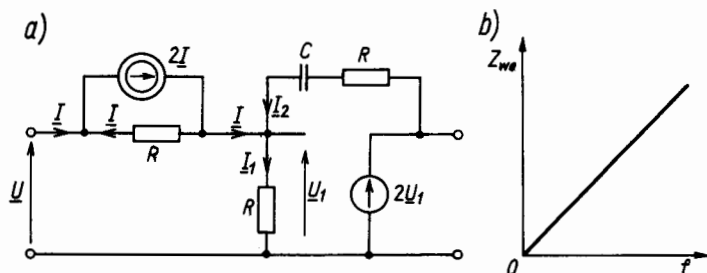
$$X_L = \sqrt{Z_L^2 - R_L^2} = \sqrt{12,5^2 - 2,5^2} = \sqrt{150} = 12,24 \, \Omega$$

$$X_L = 2\pi fL \quad \text{stąd} \quad L = \frac{12,24}{314} = 39 \, \text{mH}$$

Impedancja cewki

$$\underline{Z}_L = (2,5 + j12,24) \, \Omega$$

1.22. Obliczyć impedancję wejściową obwodu o parametrach: $R = k \Omega$, $C = 1/k \text{ F}$ (gdzie k jest dowolną liczbą naturalną), przedstawionego na rys. 1.22a. Wykreślić moduł tej impedancji w funkcji częstotliwości.



Rys. 1.22

ROZWIĄZANIE. Obwód z rys. 1.22a opisujemy równaniem wynikającym z pierwszego prawa Kirchhoffa

$$\underline{I} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2$$

przy czym

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{k}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{k + \frac{j\omega}{k}}$$

Otrzymujemy zatem

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{k} - \frac{\underline{U}_1 j\omega}{k(1 + j\omega)} = \frac{\underline{U}_1}{k(1 + j\omega)}$$

Impedancję wejściową obliczamy z zależności

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

Z bilansu napięć dla oczka pierwszego wynika, że

$$\underline{U} = \underline{U}_1 - k \underline{I}$$

Podstawiając

$$\underline{U}_1 = k(1 + j\omega) \underline{I}$$

otrzymujemy

$$\underline{U} = k(1 + j\omega) \underline{I} - k \underline{I} = jk\omega \underline{I}$$

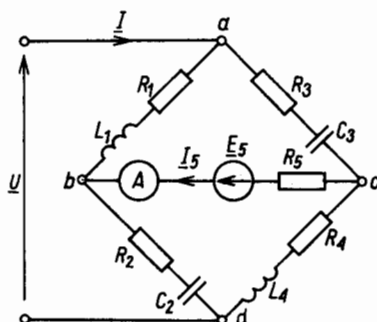
Zatem impedancja wejściowa

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{jk\omega \underline{I}}{\underline{I}} = jk\omega = jk2\pi f$$

Wykres impedancji wejściowej układu w funkcji częstotliwości przedstawiono na rys. 1.22b.

1.3. Przekształcenia równoważne struktur obwodowych

1.23. Napięcie $\underline{U} = 10 \text{ V}$ przyłożono do obwodu (rys. 1.23) o parametrach: $R_1 = R_3 = R_5 = 1 \Omega$, $R_2 = R_4 = 2 \Omega$, $X_{L1} = 1 \Omega$, $X_{L4} = 2 \Omega$, $X_{C2} = 2 \Omega$, $X_{C3} = 1 \Omega$, napięcie źródła $\underline{E}_5 = 4e^{j90^\circ} \text{ V}$. Stosując metodę Thévenina obliczyć prąd płynący przez amperomierz.



Rys. 1.23

ROZWIĄZANIE. Napięcie zastępcze $\underline{E}_{cb}$ obliczymy jako napięcie na zaciskach $c-b$ w stanie jałowym, tzn. przy przerwie w gałęzi $c-b$. W takim stanie pracy prąd płynący w gałęzi o elementach R_1, L_1, R_2, C_2 wynika ze wzoru

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{10}{3 - j1} = (3 + j1) \text{ A}$$

a prąd płynący w gałęzi o elementach R_3, C_3, R_4, L_4

$$\underline{I}_{34} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{10}{3 + j1} = (3 - j1) \text{ A}$$

Wyznamy napięcie $\underline{U}_{ab}$ na zaciskach gałęzi o impedancji $\underline{Z}_1$ oraz napięcie $\underline{U}_{ac}$ na gałęzi o impedancji $\underline{Z}_3$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_1 \underline{I}_{12} = (1 + j1)(3 + j1) = (2 + j4) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{ac} = \underline{Z}_3 \underline{I}_{34} = (1 - j1)(3 - j1) = (2 - j4) \text{ V}$$

Napięcie na zaciskach $c-b$ w stanie jałowym

$$\underline{E}_{cb} = \underline{U}_{ab} - \underline{U}_{ac} = j8 \text{ V}$$

Wyznamy impedancję zastępczą widzianą z zacisków $c-b$ przy zwarcie źródła zasilania

$$\underline{Z}_z = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{(1 + j1)(2 - j2)}{3 - j1} + \frac{(1 - j1)(2 + j2)}{3 + j1} = 2,4 \Omega$$

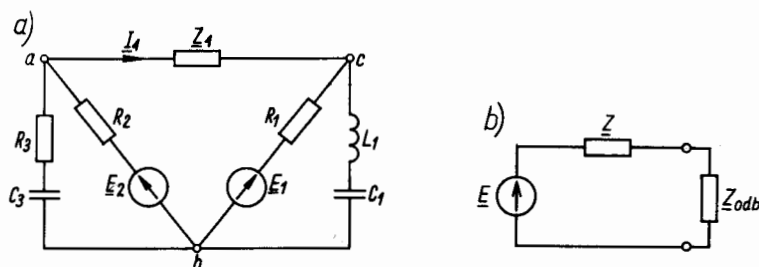
Prąd w gałęzi amperomierza wynosi

$$I_5 = \frac{\underline{E}_{cb} + \underline{E}_5}{\underline{Z}_x + R_5} = \frac{j8 + j4}{2,4 + 1} = \frac{j12}{3,4} = j3,53 \text{ A}$$

Wartość skuteczna prądu wskazywana przez amperomierz

$$I_A = 3,53 \text{ A}$$

1.24. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.24a obliczyć prąd $\underline{I}_4$ stosując twierdzenie Thevenina. Dane: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $X_{C1} = 15 \Omega$, $X_{L1} = 15 \Omega$, $X_{C3} = 5 \Omega$, $e_1 = 282 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$, $\underline{E}_2 = (100 + j100) \text{ V}$, $\underline{Z}_4 = (6 + j12) \Omega$. Jaka powinna być wartość impedancji $\underline{Z}_4$, aby moc czynna wydzielona na niej była maksymalna? Obliczyć tę moc.



Rys. 1.24

ROZWIĄZANIE. Impedancja widziana z zacisków $a-c$ jest równa impedancji gałęzi $a-b$, gdyż $X_{C1} = X_{L1}$ i wobec tego impedancja gałęzi $b-c$ jest równa zero, zatem

$$\underline{Z}_{ac} = \frac{R_2(R_3 - jX_{C3})}{R_2 + R_3 - jX_{C3}} = (4 - j2) \Omega$$

Ze względu na zwarcie gałęzi $b-c$, napięcie $\underline{U}_{ac}$ od źródła $\underline{E}_1$ jest równe zero, natomiast napięcie na zaciskach $a-c$ w stanie jałowym od źródła $\underline{E}_2$ wynosi

$$\underline{U}_{ac} = \frac{\underline{E}_2(R_3 - jX_{C3})}{R_2 + R_3 - jX_{C3}} = \frac{100(1 + j1)(5 - j5)}{15 - j5} = (60 + j20) = 63,2e^{j18^\circ} \text{ V}$$

Prąd $\underline{I}_4$ w postaci zespolonej, wynikający z dwójnika zastępczego Thevenina

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{ac}}{\underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_4} = \frac{60 + j20}{4 - j2 + 6 + j12} = (4 - j2) = \sqrt{20} e^{-j26^\circ} \text{ A}$$

i w postaci czasowej

$$i_4(t) = 6,32 \sin(\omega t - 26^\circ) \text{ A}$$

Warunkiem, aby $P = P_{\max}$ jest $\underline{Z}_{odb} = \underline{Z}^*$ (rys. 1.24b).

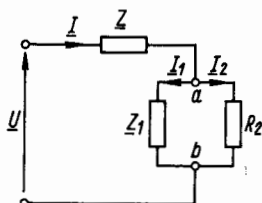
W rozpatrywanym przypadku oznacza to, że impedancja $\underline{Z}_4 = 4 + j2 = \underline{Z}_{ac}^*$, a wówczas moc maksymalna

$$P_{\max} = \frac{U_{ac}^2}{4 \operatorname{Re} \underline{Z}_{ac}} = \frac{63,2^2}{16} = 249,6 \text{ W}$$

oraz prąd

$$\underline{I}'_4 = \frac{\underline{U}_{ac}}{\underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_4} = \frac{60 + j20}{4 - j2 + 4 + j2} = \frac{60 + j20}{8} = 7,5 + j2,5 = 7,9e^{j18^\circ} \text{ A}$$

1.25. Jaką wartość powinna mieć rezystancja R_2 , aby w obwodzie przedstawionym na rys. 1.25 prąd $\underline{I}_1$ był w fazie z napięciem zasilającym. Dane: $\underline{Z}_1 = (10 + j25) \Omega$, $\underline{Z} = (5 - j16) \Omega$.



Rys. 1.25

ROZWIĄZANIE. W celu obliczenia prądu $\underline{I}_1$ korzystamy z twierdzenia Thevenina. Impedancja widziana z zacisków $a-b$ (przy zwartym źródle zasilającym $\underline{U}$ i odłączonej impedancji $\underline{Z}_1$)

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{R_2 \underline{Z}}{R_2 + \underline{Z}}$$

Napięcie w stanie jałowym (przy odłączonej impedancji $\underline{Z}_1$)

$$\underline{U}_{ab0} = \frac{\underline{U} R_2}{\underline{Z} + R_2}$$

Zatem prąd $\underline{I}_1$ wyraża się zależnością

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab0}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab}} = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}}{R_2} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}}$$

Aby prąd $\underline{I}_1$ był w fazie z napięciem $\underline{U}$, część urojona mianownika powinna być równa zero. Zatem

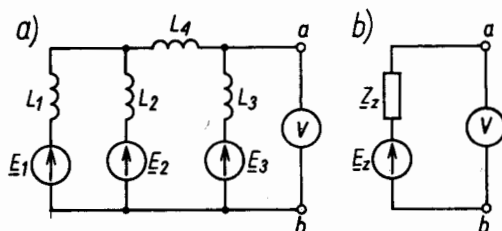
$$\operatorname{Im} \left(\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}}{R_2} \right) + \operatorname{Im} \underline{Z}_1 + \operatorname{Im} \underline{Z} = 0$$

Podstawiając dane, otrzymamy

$$\frac{-160 + 125}{R_2} + 25 - 16 = 0$$

$$\frac{-35}{R_2} = -9 \quad \text{stąd} \quad R_2 = \frac{35}{9} = 3,888 \, \Omega$$

1.26. Obliczyć napięcie na zaciskach $a-b$ w obwodzie przedstawionym na rys. 1.26. Parametry obwodu są następujące: $X_1 = X_2 = X_3 = 1 \, \Omega$, $X_4 = 0,5 \, \Omega$, $\underline{E}_1 = 100 \, \text{V}$, $\underline{E}_2 = j50 \, \text{V}$, $\underline{E}_3 = j25 \, \text{V}$.



Rys. 1.26

ROZWIĄZANIE. Napięcie zastępcze obliczamy z zależności

$$\underline{E}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E}_1 + \underline{Y}_2 \underline{E}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{(-j1)100 + (-j1)(j50)}{-j2} = (50 + j25) \, \text{V}$$

Admitancja $\underline{Y}_{12}$ wynosi

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = -j2 \, \text{S}$$

skąd

$$\underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = j0,5 \, \Omega$$

Szeregowo z impedancją $\underline{Z}_{12}$ jest połączona impedancja $\underline{Z}_4 = jX_4 = j0,5 \, \Omega$.
Zatem

$$\underline{Z}_{124} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_4 = j0,5 + j0,5 = j1 \, \Omega$$

Napięcie na zaciskach $a-b$ obliczamy jako napięcie zastępcze dwóch gałęzi aktywnych, połączonych równolegle: gałęzi o napięciu $\underline{E}_{12}$ i impedancji $\underline{Z}_{124}$, oraz gałęzi o napięciu $\underline{E}_3$ i impedancji $\underline{Z}_3$. Admitancje zespolone tych gałęzi wynoszą odpowiednio

$$\underline{Y}_{124} = \frac{1}{\underline{Z}_{124}} = -j1 \, \text{S}; \quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = -j1 \, \text{S}$$

Ponownie korzystamy z pierwszego wzoru i obliczamy

$$\underline{E}_z = \frac{Y_{124}\underline{E}_{12} + Y_3\underline{E}_3}{Y_{124} + Y_3} = \frac{(-j1)(50 + j25) + (-j1)(j25)}{-j2} = (25 + j25) \text{ V}$$

Admitancję zastępczą obliczamy na podstawie wzoru

$$\underline{Y}_z = \underline{Y}_{124} + \underline{Y}_3 = -j2 \text{ S}$$

wówczas impedancja zastępcza

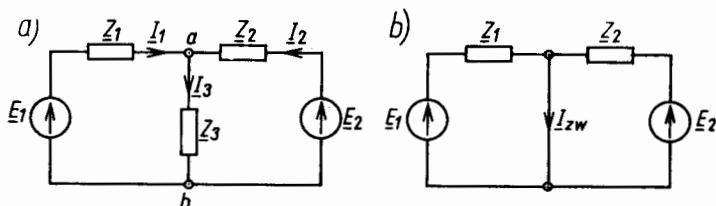
$$\underline{Z}_z = j0,5 \Omega$$

Rozpatrywany obwód można więc zastąpić dwójnikiem aktywnym o napięciu źródłowym $\underline{E}_z = (25 + j25) \text{ V}$ i impedancji $\underline{Z}_z = j0,5 \Omega$ (rys. 1.26b).

Wskazanie idealnego woltomierza wynosi

$$U_V = E_z = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25\sqrt{2} \text{ V}$$

1.27. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.27a obliczyć prąd płynący przez impedancję $\underline{Z}_3 = j20 \Omega$, stosując twierdzenie o zastępczym źródle prądu (twierdzenie Nortona). Źródła zasilania wynoszą: $\underline{E}_1 = j200 \text{ V}$, $\underline{E}_2 = 200 \text{ V}$, a impedancje $\underline{Z}_1 = (20 + j20) \Omega$, $\underline{Z}_2 = -j40 \Omega$.



Rys. 1.27

ROZWIĄZANIE. Stosujemy twierdzenie Nortona. Obliczamy prąd zwarcia gałęzi $a-b$. Prąd ten przepływa przez gałąź $a-b$ po zwarciu zacisków $a-b$ (zgodnie z rys. 1.27b)

$$\underline{I}_{zw} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{j200}{20 + j20} + \frac{200}{-j40} = 5 + j5 + j5 = (5 + j10) \text{ A}$$

Napięcie na gałęzi $a-b$ wynosi

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\underline{I}_{zw}}{\underline{Y}_z + \underline{Y}_g} = \frac{5 + j10}{\frac{1}{40} - j\frac{1}{20}} = (-120 + j160) \text{ V}$$

gdzie: $\underline{Y}_z$ — admitancja zastępcza obwodu widzianego z zacisków $a-b$ przy przerwie w gałęzi $a-b$ oraz zwartych źródłach $\underline{E}_1$ i $\underline{E}_2$, wyrażona wzorem

$$\underline{Y}_z = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{20 + j20} + \frac{1}{-j40} = \frac{1}{40} - j\frac{1}{40} + j\frac{1}{40} = \frac{1}{40} \text{ S}$$

oraz $\underline{Y}_g$ — admitancja gałęzi $a-b$

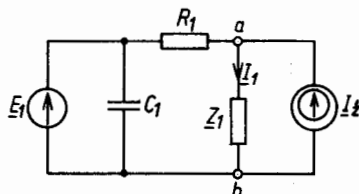
$$\underline{Y}_g = \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{j20} = -j\frac{1}{20} \text{ S}$$

Prąd płynący przez impedancję $\underline{Z}_3$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{Y}_3 \underline{I}_{zw}}{\underline{Y}_z + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{-120 + j160}{j20} = (8 + j6) \text{ A}$$

1.28. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.28 obliczyć prąd płynący przez impedancję $\underline{Z}_1 = 100 \Omega$ stosując twierdzenie Nortona.

Dane: $i_z = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$, $\underline{E}_1 = 200 \text{ V}$, $R_1 = 100 \Omega$, $X_{C1} = 100 \Omega$.



Rys. 1.28

ROZWIĄZANIE. Obliczamy prąd zwarciový w gałęzi $a-b$

$$\underline{I}_{zw} = \underline{I}_z + \frac{\underline{E}_1}{R_1} = j2 + \frac{200}{100} = (2 + j2) \text{ A}$$

Napięcie na gałęzi $a-b$

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\underline{I}_{zw}}{\underline{Y}_z + \underline{Y}_g} = \frac{2 + j2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}} = \frac{2 + j2}{\frac{2}{100}} = (100 + j100) \text{ V}$$

gdzie: $\underline{Y}_z = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{100} \text{ S}$; $\underline{Y}_g = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{100} \text{ S}$

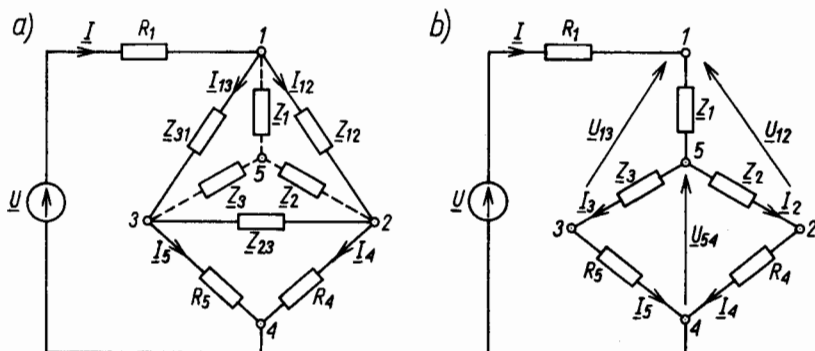
Prąd $\underline{I}_1$ w postaci zespolonej

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_1} = \frac{100 + j100}{100} = (1 + j1) \text{ A}$$

i w postaci czasowej

$$i_1(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$$

1.29. Obliczyć rozpyływ prądów w obwodzie przedstawionym na rys. 1.29a. Dane: napięcie źródła $\underline{U} = j100 \text{ V}$, $R_1 = 15 \Omega$, $\underline{Z}_{12} = -j20 \Omega$, $\underline{Z}_{23} = 40 \Omega$, $\underline{Z}_{31} = j20 \Omega$, $R_4 = R_5 = 40 \Omega$.



Rys. 1.29

ROZWIĄZANIE. Dane są parametry obwodu, a więc można obliczyć impedancję zastępczą, a następnie prąd wejściowy. W celu obliczenia impedancji zastępczej obwodu, niezbędne jest przekształcenie trójkąta impedancji 1, 2, 3 lub 2, 3, 4 w gwiazdę impedancji. W rozpatrywanym przypadku przekształcono trójkąt impedancji 1, 2, 3 w gwiazdę impedancji 1, 2, 3 (rys. 1.29b). Wartości impedancji gałęzi gwiazdy obliczymy z zależności

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \frac{-j20 \cdot j20}{40} = 10 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \frac{-j20 \cdot 40}{40} = -j20 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \frac{40 \cdot j20}{40} = j20 \Omega$$

Impedancja zastępcza obwodu

$$\begin{aligned} \underline{Z}_z &= R_1 + \underline{Z}_1 + \frac{(\underline{Z}_3 + R_5)(\underline{Z}_2 + R_4)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + R_4 + R_5} = \\ &= 15 + 10 + \frac{(40 + j20)(40 - j20)}{80} = 50 \Omega \end{aligned}$$

Impedancja $\underline{Z}_z$ ma tylko część rzeczywistą, zatem cały obwód ma charakter rezystancyjny.

Prąd wejściowy jest w fazie z napięciem zasilania

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_z} = \frac{j100}{50} = j2 \text{ A}$$

Napięcie $\underline{U}_{54}$ na gałęziach równoległych

$$\underline{U}_{54} = \underline{Z}_{54} \underline{I} = \underline{U} - (\underline{R}_1 + \underline{Z}_1) \underline{I} = j100 - j50 = j50 \text{ V}$$

Prądy gałęziowe $\underline{I}_2$ oraz $\underline{I}_3$ obliczymy zgodnie z prawem Ohma

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{54}}{\underline{Z}_2 + R_4} = \frac{j50}{40 - j20} = (-0,5 + j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{54}}{\underline{Z}_3 + R_5} = \frac{j50}{40 + j20} = (0,5 + j1) \text{ A}$$

Aby obliczyć prądy $\underline{I}_{12}$ i $\underline{I}_{13}$ w obwodzie z rys. 1.29a, należy obliczyć napięcia $\underline{U}_{12}$ oraz $\underline{U}_{13}$ w obwodzie z rys. 1.29b

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = 10 \cdot j2 + (-j20)(-0,5 + j1) = (20 + j30) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{13} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = 10 \cdot j2 + (j20)(0,5 + j1) = (-20 + j30) \text{ V}$$

Prądy gałęziowe $\underline{I}_{12}$ i $\underline{I}_{13}$ wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{20 + j30}{-j20} = (-1,5 + j1) \text{ A}$$

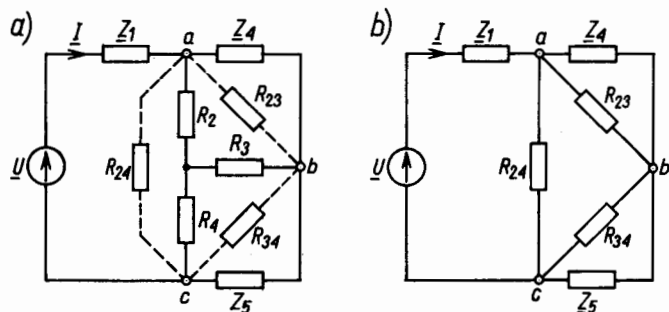
$$\underline{I}_{13} = \frac{\underline{U}_{13}}{\underline{Z}_{13}} = \frac{-20 + j30}{j20} = (1,5 + j1) \text{ A}$$

Pozostałe prądy w obwodzie z rys. 1.29a są równe

$$\underline{I}_4 = (-0,5 + j1) \text{ A}; \quad \underline{I}_5 = (0,5 + j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{23} = \underline{I}_{12} - \underline{I}_4 = \underline{I}_5 - \underline{I}_{13} = 0,5 + j1 - 1,5 - j1 = -1 \text{ A}$$

1.30. Źródło napięcia $\underline{U} = j200 \text{ V}$ dołączono do obwodu (rys. 1.30a) o parametrach: $\underline{Z}_1 = (10 + j30) \Omega$, $\underline{Z}_4 = j100 \Omega$, $\underline{Z}_5 = -j100 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = R_4 = 60 \Omega$. Obliczyć moc pozorną w postaci zespolonej źródła zasilania.



Rys. 1.30

ROZWIĄZANIE. W celu obliczenia impedancji zastępczej zamieniamy gwiazdę rezystancji abc w równoważny trójkąt rezystancji abc (rys. 1.30b).

Rezystancje gałęzi trójkąta wynoszą odpowiednio

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_4} = 100 \, \Omega$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 + \frac{R_3 R_4}{R_2} = 300 \, \Omega$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 R_4}{R_3} = 100 \, \Omega$$

Impedancja zastępcza

$$\underline{Z}_z = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_{ac}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc})}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc}} = 10 + j30 + \frac{100(80 - j40)}{180 - j40} = (57 + j18,24) \, \Omega$$

przy czym

$$\underline{Z}_{ac} = R_{24} = 100 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_4 R_{23}}{\underline{Z}_4 + R_{23}} = \frac{j100 \cdot 100}{100 + j100} = (50 + j50) \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{bc} = \frac{\underline{Z}_5 R_{34}}{\underline{Z}_5 + R_{34}} = \frac{-j100 \cdot 300}{300 - j100} = (30 - j90) \, \Omega$$

Prąd wejściowy

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_z} = \frac{j200}{57 + j18,24} = \frac{j200(57 - j18,24)}{3581} = \\ &= \frac{3648 + j11400}{3581} = (1,02 + j3,18) \, \text{A} \end{aligned}$$

Moc pozorna w postaci zespolonej źródła napięcia

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = j200(1,02 - j3,18) = (636 + j204) \, \text{V} \cdot \text{A}$$

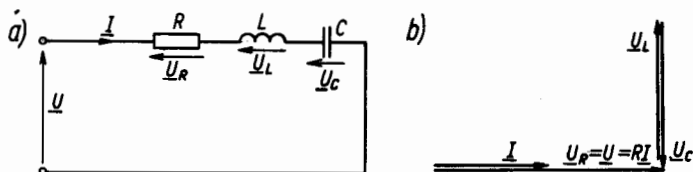
Zatem moc czynna źródła $P = 636 \, \text{W}$, a moc bierna indukcyjna $Q = 204 \, \text{var}$.

1.4. Charakterystyki częstotliwościowe obwodów

1.4.1. Rezonans napięć

1.31. Obwód szeregowy RLC przedstawiony na rys. 1.31a ma następujące parametry: $R = 10 \, \Omega$, $L = 16 \, \text{mH}$, $C = 40 \, \mu\text{F}$. Obliczyć częstotliwość i pulsację rezonansową, impedancję falową, dobroć, współczynnik tłumienia, rozstrojenie

względne, rozstrojenie względne przybliżone, szerokość pasma przenoszenia oraz całkowitą energię nagromadzoną w układzie w stanie rezonansu. Wykonać wykres wektorowy. Napięcie zasilania $u = 100\sqrt{2} \cos 1200t$ V.



Rys. 1.31

ROZWIĄZANIE. Dla rozpatrywanego obwodu słuszne są zależności

$$\underline{U}_R = R \underline{I}$$

$$\underline{U}_L = jX_L \underline{I}$$

$$\underline{U}_C = -jX_C \underline{I}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = [R + j(X_L - X_C)] \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}$$

Rezonans napięć wystąpi wówczas, gdy $\varphi = 0$, tzn. $X = 0$, czyli

$$X_L = X_C$$

lub

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Częstotliwość, przy której jest spełniony powyższy warunek, jest częstotliwością rezonansową obwodu i wynosi

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \sqrt{16 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-5}}} = 199 \text{ Hz}$$

a pulsacja rezonansowa

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{16 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-5}}} = \frac{1}{\sqrt{64 \cdot 10^{-8}}} = 1250 \text{ rad/s}$$

Impedancja falowa

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-5}}} = 20 \Omega$$

W rozpatrywanym obwodzie szeregowym dobroć cewki i kondensatora w stanie rezonansu wyraża się zależnością

$$Q_L = Q_C = Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{20}{10} = 2$$

Współczynnik tłumienia wynosi $d = 1/Q = 0,5$.

Rozstrojenie względne δ , będące stosunkiem reaktancji wypadkowej X do impedancji falowej ρ , określa wzór

$$\delta = \frac{X}{\rho} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \frac{191}{199} - \frac{199}{191} = -0,09$$

Rozstrojenie względne przybliżone δ' wynosi

$$\delta' = 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2 \frac{1200 - 1250}{1250} = -0,08$$

Rozstrojeniem bezwzględnym ξ nazywamy stosunek reaktancji wypadkowej X do rezystancji R . Kąt fazowy impedancji obwodu z rys. 1.31a w funkcji rozstrojenia wynosi

$$\varphi = \arctg \xi$$

czyli

$$\xi = \tg \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{19,2 - 20,8}{10} = -0,16$$

Szerokość pasma przenoszenia

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = d\omega_0 = 0,5 \cdot 1250 = 625 \text{ rad/s}$$

Dobroć obwodu rezonansowego określa się również zależnością

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1250}{625} = 2$$

Następnie wyznaczmy energię w obwodzie z rys. 1.31a w stanie rezonansu. Energia pola magnetycznego cewki zmienia się w funkcji czasu zgodnie z zależnością

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Energia pola elektrycznego kondensatora zmienia się zgodnie z zależnością

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2 \cos^2 \omega_0 t$$

W stanie rezonansu

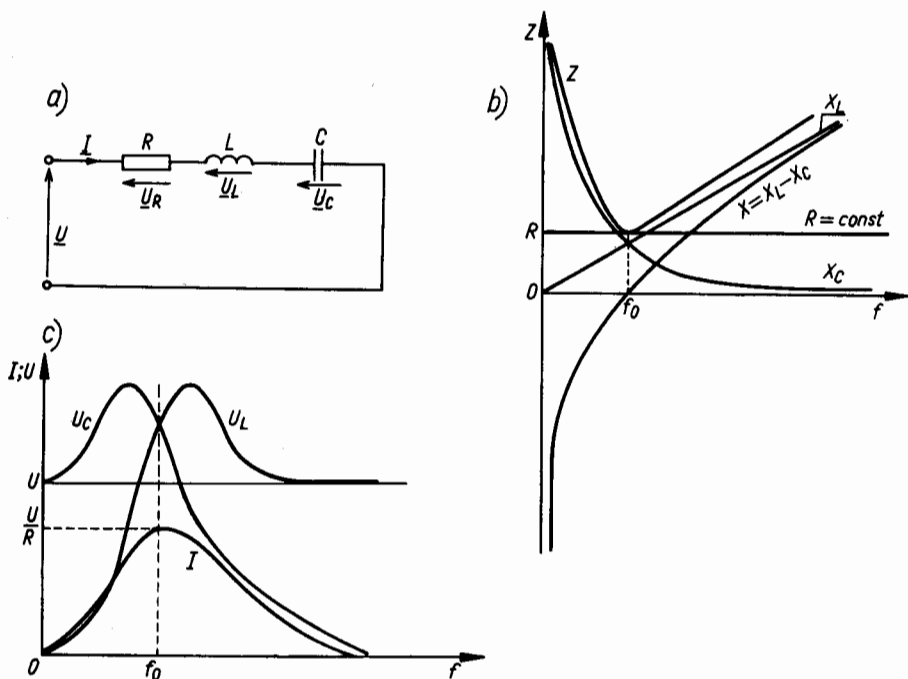
$$U_{Cm} = U_{Lm} = \omega_0 L I_m; \quad \omega_0^2 LC = 1$$

Całkowita energia W nagromadzona w obwodzie

$$W = W_C(t) + W_L(t) = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 = 0,8 \text{ J}$$

Wykres wektorowy obwodu z rys. 1.31a dla stanu rezonansu przedstawia rys. 1.31b.

1.32. Dla obwodu przedstawionego na rys. 1.32a narysować w funkcji częstotliwości przebiegi: rezystancji, reaktancji indukcyjnej, pojemnościowej i wypadkowej, prądu w obwodzie oraz napięć U_C i U_L . Wyznaczyć impedancję wypadkową układu oraz narysować przebieg modułu tej impedancji w funkcji częstotliwości.



Rys. 1.32

ROZWIĄZANIE. Na rysunku 1.32b przedstawiono wykres rezystancji R , reaktancji: indukcyjnej X_L , pojemnościowej X_C i wypadkowej $X = X_L - X_C$ oraz modułu impedancji układu w funkcji częstotliwości f , zmieniającej się od zera przez f_0 do nieskończoności.

Rezystancja R nie zależy od częstotliwości i wykresem jej jest prosta równoległa do osi odciętych. Reaktancja indukcyjna $X_L = 2\pi fL = \omega L$ zmienia się wprost proporcjonalnie do częstotliwości. Przy $f = 0$, $X_L = 0$, a przy $f \rightarrow \infty$, $X_L \rightarrow \infty$. Wykresem reaktancji X_L w funkcji częstotliwości jest zatem linia prosta przechodząca przez początek układu. Reaktancja pojemnościowa $X_C = 1/2\pi fC = 1/\omega C$ zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do częstotliwości. Przy $f = 0$, $X_C \rightarrow \infty$, a przy $f \rightarrow \infty$, $X_C \rightarrow 0$. Wykresem reaktancji X_C w funkcji częstotliwości jest hiperbola, której asymptotami są osie układu współrzędnych (rys. 1.32b).

Wykresem reaktancji wypadkowej $X = X_L - X_C$ jest hiperbola, której asymptotami są: oś rzędnych w przedziale od 0 do $-j\infty$ oraz prosta X_L . Wykres reaktancji wypadkowej X przecina oś odciętych w punkcie f_0 . Opisuje to za-

leżność analityczna

$$X = X_L - X_C = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

Impedancja zespolona układu z rys. 1.32a wynosi

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

a jej moduł

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Przy częstotliwości równej zero, $Z \rightarrow \infty$, ponieważ $X_C \rightarrow \infty$. Przy częstotliwości rezonansowej f_0 , $Z = R$, gdyż reaktancja wypadkowa X wynosi zero. Gdy $f \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow \infty$, ponieważ $X_L \rightarrow \infty$.

Prąd w obwodzie wynosi

$$I = \frac{U}{Z}$$

Przy częstotliwości $f = 0$ prąd I wynosi zero, natomiast przy częstotliwości rezonansowej prąd ma wartość maksymalną

$$I = \frac{U}{R}$$

Gdy częstotliwość zmierza do nieskończoności, prąd w obwodzie zmierza do zera. Moduły napięcia na cewce i kondensatorze określają zależności

$$U_L = \omega L I = \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 L I$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\omega_0 C} I$$

Wprowadzając oznaczenia $k = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\delta = k - \frac{1}{k}$, $Q = Q_L = Q_C = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}$, $d = \frac{1}{Q}$, otrzymujemy

$$U_L = U \sqrt{\frac{k^2}{d^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}}$$

$$U_C = U \sqrt{\frac{k^2}{k^2 \left[d^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2\right]}}$$

Szukamy ekstremum napięcia na cewce. Przyrównując pochodną dU_L/dk do zera, otrzymujemy wyrażenie

$$2k\left(d^2 + k^2 - 2 + \frac{1}{k^2}\right) - 2k^2\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = 0$$

po przekształceniu

$$d^2 - 2 + \frac{2}{k^2} = 0$$

Szukana wartość k , której odpowiada największa wartość modułu napięcia na cewce, wynosi

$$k_L = \sqrt{\frac{2}{2 - d^2}}$$

Wielkość podpierwiastkowa jest ułamkiem większym od jedności, wobec tego największa wartość modułu napięcia na cewce odpowiada pulsacji większej od rezonansowej $\omega_L > \omega_0$.

Następnie szukamy ekstremum napięcia na kondensatorze. Przyrównując pochodną dU_C/dk do zera, otrzymujemy wyrażenie

$$2k\left(d^2 + k^2 - 2 + \frac{1}{k^2}\right) + 2k^2\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = 0$$

po przekształceniu

$$d^2 - 2 + 2k^2 = 0$$

Szukana wartość k , której odpowiada największa wartość modułu napięcia na kondensatorze, wynosi

$$k_C = \sqrt{\frac{2 - d^2}{2}}$$

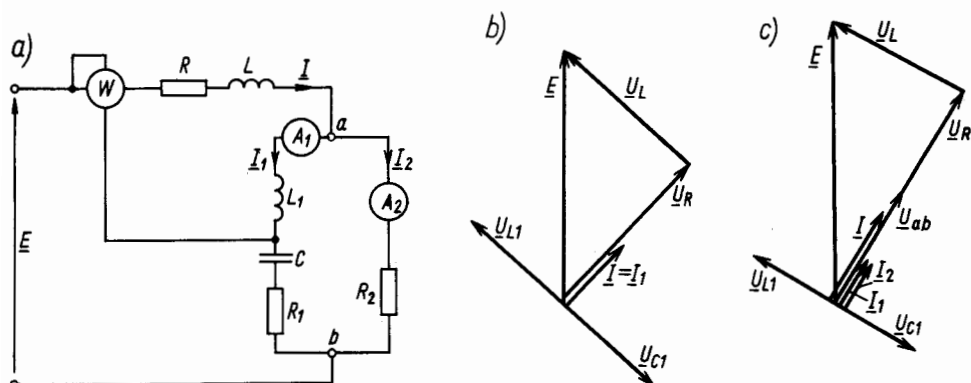
Wielkość podpierwiastkowa jest ułamkiem mniejszym od jedności, wobec tego największa wartość modułu napięcia na kondensatorze odpowiada pulsacji mniejszej od rezonansowej ($\omega_C < \omega_0$). Przebiegi prądu I oraz napięć U_C i U_L w funkcji częstotliwości przedstawiono na rys. 1.32c.

1.33. Obliczyć wskazania amperomierzy i watomierza w obwodzie przedstawionym na rys. 1.33a w przypadku: a) $R_1 = 0$; b) $R_1 = 10 \Omega$. Dane: $e = 100\sqrt{2} \sin(100t + 90^\circ) \text{ V}$, $R = R_2 = 10 \Omega$, $L = L_1 = 0,1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ mF}$. Wykonać wykresy wektorowe dla obu przypadków.

ROZWIĄZANIE

a) Impedancja całkowita układu przy $R_1 = 0$

$$\underline{Z} = R + jX_L + \frac{R_2 j(X_{L1} - X_C)}{R_2 + j(X_{L1} - X_C)} = 10 + j10 + \frac{10 \cdot j(10 - 10)}{10} = (10 + j10) \Omega$$



Rys. 1.33

W obwodzie z rys. 1.33a występuje zatem rezonans napięć w gałęzi L_1, C . Prąd w obwodzie

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{j100}{10 + j10} = 5 + j5 = 5\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ A}$$

W stanie rezonansu prąd całkowity w obwodzie popłynie przez gałąź, w której zachodzi rezonans, a więc $\underline{I}_1 = \underline{I}$ oraz $\underline{I}_2 = 0$. Zatem wskazania amperomierzy wynoszą odpowiednio

$$I_{A1} = 5\sqrt{2} \text{ A} \quad \text{oraz} \quad I_{A2} = 0$$

Cewka napięciowa watomierza jest włączona na napięcie

$$\underline{U}_w = (R + jX_{L1} + jX_L) \underline{I} = (10 + j20)(5 + j5) = (-50 + j150) \text{ V}$$

Wskazanie watomierza

$$P = \text{Re}(\underline{U}_w \underline{I}^*) = \text{Re}[(-50 + j150)(5 - j5)] = 500 \text{ W}$$

Watomierz wskazuje moc, jaka wydzieli się na rezystancji R

$$P = RI^2 = 10(5\sqrt{2})^2 = 500 \text{ W}$$

Wykres wektorowy jest przedstawiony na rys. 1.33b.

b) Impedancja całkowita układu przy $R_1 = 10 \Omega$

$$\underline{Z} = R + jX_L + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = (15 + j15) \Omega$$

Prąd płynący w obwodzie

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{j100}{15 + j15} = (3,1 + j4,7) \text{ A}$$

Napięcie na zaciskach $a-b$

$$\underline{U}_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \underline{I} = 5(3,1 + j4,7) = (15,5 + j23,5) \text{ V}$$

Prądy w gałęziach równoległych

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_1} = \frac{15,5 + j23,5}{10} = (1,55 + j2,35) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_2} = \frac{15,5 + j23,5}{10} = (1,55 + j2,35) \text{ A}$$

Zatem wskazania amperomierzy są jednakowe

$$I_{A1} = I_{A2} = \sqrt{1,55^2 + 2,35^2} = 2,815 \text{ A}$$

Cewka napięciowa watomierza jest włączona na napięcie

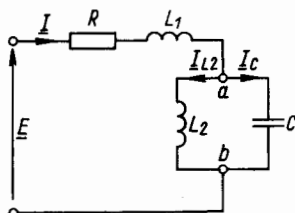
$$\underline{U}_w = (R + jX_L) \underline{I} + jX_{L1} \underline{I}_1 = (-40 + j94) \text{ V}$$

Wskazanie watomierza

$$P = \operatorname{Re}(\underline{U}_w \underline{I}^*) = \operatorname{Re}[(-40 + j94)(3,1 - j4,7)] = 318 \text{ W}$$

Wykres wektorowy jest przedstawiony na rys. 1.33c.

1.34. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.34 parametry wynoszą: $R = 10 \Omega$, $L_1 = L_2 = 20 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$. Obliczyć rozpyły prądów w obwodzie dla stanu rezonansu napięć. Źródło napięcia $\underline{E} = 40 \text{ V}$.



Rys. 1.34

ROZWIĄZANIE. Dla stanu rezonansu napięć obowiązuje zależność

$$\operatorname{Im} \underline{Z} = jX_{L1} + \frac{jX_{L2}(-jX_C)}{j(X_{L2} - X_C)} = jX_{L1} + \frac{X_{L2}X_C}{j(X_{L2} - X_C)} = 0$$

Zatem pulsacja rezonansowa

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ rad/s}$$

a częstotliwość rezonansowa

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10^4}{6,28} = 1628 \text{ Hz}$$

Prąd w obwodzie przy rezonansie napięć jest w fazie z napięciem zasilania

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R} = \frac{40 e^{j0^\circ}}{10} = 4 \text{ A}$$

postać czasowa prądu $i(t) = 4\sqrt{2} \sin 10^4 t \text{ A}$.

W celu obliczenia prądów gałęziowych wyznaczamy napięcie

$$\underline{U}_{ab} = \frac{jX_{L2}(-jX_C)}{j(X_{L2} - X_C)} \underline{I} = \frac{j200(-j100)}{j100} 4 = 800 e^{-j90^\circ} \text{ V}$$

Prądy gałęziowe są następujące:

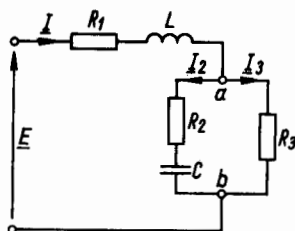
$$\underline{I}_{L2} = \frac{\underline{U}_{ab}}{jX_{L2}} = \frac{800 e^{-j90^\circ}}{j200} = -4 \text{ A}$$

postać czasowa prądu $i_{L2}(t) = 4\sqrt{2} \sin(10^4 t + 180^\circ) \text{ A}$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{ab}}{-jX_C} = \frac{800 e^{-j90^\circ}}{-j100} = 8 \text{ A}$$

postać czasowa prądu $i_C(t) = 8\sqrt{2} \sin 10^4 t \text{ A}$.

1.35. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.35 parametry elementów wynoszą: $R_1 = 3 \Omega$, $X_C = 6 \Omega$, $R_2 = R_3 = 6 \Omega$, $e = 66\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$. Obliczyć X_L , przy której w obwodzie będzie występował rezonans napięć. Dla stanu rezonansu obliczyć rozpyływ prądów oraz moc pobieraną przez układ.



Rys. 1.35

ROZWIĄZANIE. Impedancja gałęzi równoległych wynosi

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{R_3(R_2 - jX_C)}{R_2 + R_3 - jX_C} = \frac{6(6 - j6)}{12 - j6} = (3,6 - j1,2) \Omega$$

Aby w obwodzie zachodził rezonans napięć, musi być spełniona zależność

$$X_L + \operatorname{Im} \underline{Z}_{ab} = 0$$

zatem

$$X_L = 1,2 \, \Omega$$

Dla stanu rezonansu prąd w obwodzie

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R_1 + \operatorname{Re} \underline{Z}_{ab}} = \frac{66 e^{-j45^\circ}}{6,6} = (5\sqrt{2} - j5\sqrt{2}) = 10 e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

Prądy gałęziowe

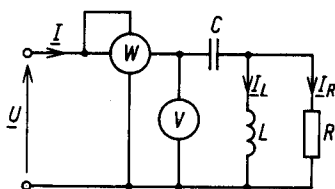
$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{ab}}{R_2 - jX_C} = \frac{\underline{Z}_{ab} \underline{I}}{R_2 - jX_C} = \frac{10 e^{-j45^\circ} (3,6 - j1,2)}{6\sqrt{2} e^{-j45^\circ}} = \\ &= (3\sqrt{2} - j\sqrt{2}) = 2\sqrt{5} e^{-j18^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_3} = (2\sqrt{2} - j4\sqrt{2}) = 2\sqrt{10} e^{-j63^\circ} \text{ A}$$

Obwód z rys. 1.35 w stanie rezonansu napięć pobiera tylko moc czynną, która jest równa

$$P = R_{\text{ukł}} I^2 = [R_1 + \operatorname{Re} \underline{Z}_{ab}] I^2 = (3 + 3,6) 10^2 = 6,6 \cdot 10^2 = 660 \text{ W}$$

1.36. W stanie rezonansu woltomierz wskazuje 5 V, a watomierz 50 W (rys. 1.36). Obliczyć wartości R i X_C , jeżeli $X_L = 1 \, \Omega$.



Rys. 1.36

ROZWIĄZANIE. W stanie rezonansu obwód ma charakter rezystancyjny ($\cos \varphi = 1$), zatem moc czynna

$$P = UI$$

Stąd wartość skuteczna prądu

$$I = \frac{P}{U} = \frac{50}{5} = 10 \text{ A}$$

Impedancja wypadkowa obwodu

$$\begin{aligned} \underline{Z}_w &= -jX_C + \frac{R jX_L}{R + jX_L} = -jX_C + \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} + j \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} = \\ &= \frac{R}{R^2 + 1} + j \left(\frac{R^2}{R^2 + 1} - X_C \right) \end{aligned}$$

Z zależności na moc czynną obwodu $P = \operatorname{Re} \underline{Z}_w I^2$ wyznaczamy wartość rezystancji

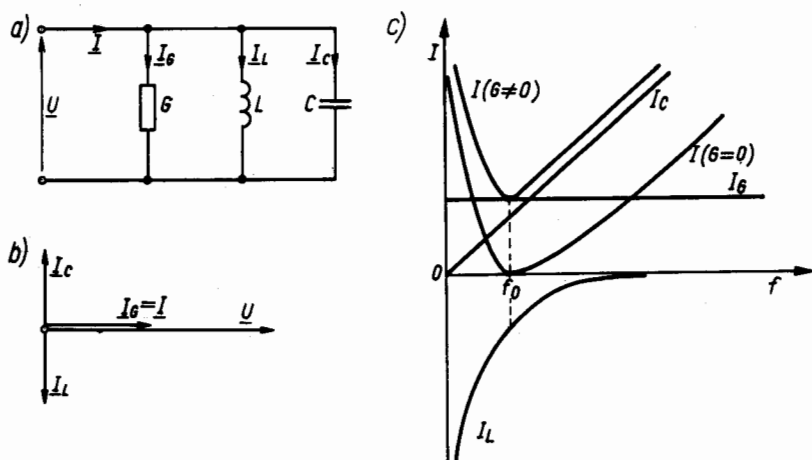
$$\frac{R}{R^2 + 1} = \frac{P}{I^2} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \quad \text{stad} \quad R = 1 \, \Omega$$

W stanie rezonansu $\operatorname{Im} \underline{Z}_w = 0$, zatem

$$\frac{R^2}{R^2 + 1} - X_C = 0, \quad \text{stad} \quad X_C = \frac{1}{2} \, \Omega$$

1.4.2. Rezonans prądów

1.37. Elementy o parametrach $R = 10 \, \Omega$, $L = 16 \, \text{mH}$, $C = 40 \, \mu\text{F}$ połączone równolegle otrzymując obwód przedstawiony na rys. 1.37a, zasilany napięciem $u(t) = 100\sqrt{2} \sin 1200t \, \text{V}$. Obliczyć częstotliwość i pulsację rezonansową, impedancję falową, dobroć cewki i kondensatora, współczynnik tłumienia, rozstrojenie względne, rozstrojenie względne przybliżone, rozstrojenie bezwzględne, szerokość pasma przenoszenia. Wykonać wykres wektorowy oraz obliczyć rozptyw prądu w stanie rezonansu. Narysować przebiegi prądów w funkcji częstotliwości.



Rys. 1.37

ROZWIĄZANIE. Prądy w gałęziach obwodu wynoszą

$$\underline{I}_G = G \underline{U}$$

$$\underline{I}_L = -jB_L \underline{U}$$

$$\underline{I}_C = jB_C \underline{U}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_L + \underline{I}_C = (G - jB_L + jB_C) \underline{U} = \\ = [G + j(B_C - B_L)] \underline{U} = (G + jB) \underline{U}$$

Rezonans w rozpatrywanym obwodzie wystąpi wówczas, gdy kąt fazowy układu $\varphi = 0$, co jest spełnione przy $B = 0$, czyli

$$B_C = B_L; \quad \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$$

Zatem pulsacja rezonansowa

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1250 \text{ rad/s}$$

a częstotliwość rezonansowa

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 199 \text{ Hz}$$

Dobroć cewki lub kondensatora w stanie rezonansu prądów wyrażamy zależnością

$$Q_L = Q_C = Q = \frac{I_L}{I_G} = \frac{I_C}{I_G} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 L G} = \\ = \frac{1}{1250 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1} = 0,5$$

Współczynnik tłumienia

$$d = 1/Q = 2$$

Impedancja falowa obwodu

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R}{Q} = 20 \Omega$$

Rozstrojenie bezwzględne

$$\xi = -\frac{B}{G} = -\frac{0,048 - 0,052}{0,1} = 0,04$$

Rozstrojenie względne

$$\delta = \frac{B}{\frac{1}{\rho}} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = -0,082$$

przy czym $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1200}{6,28} = 191 \text{ Hz}$.

Rozstrojenie względne przybliżone

$$\delta' = 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2 \frac{1200 - 1250}{1250} = -0,08$$

Szerokość pasma przenoszenia

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 d = 2 \cdot 1250 = 2500 \text{ rad/s}$$

Prądy w stanie rezonansu wynoszą

$$\underline{I} = \underline{I}_G = G \underline{U} = 100 e^{j0^\circ} \cdot 0,1 = 10 e^{j0^\circ} \text{ A}$$

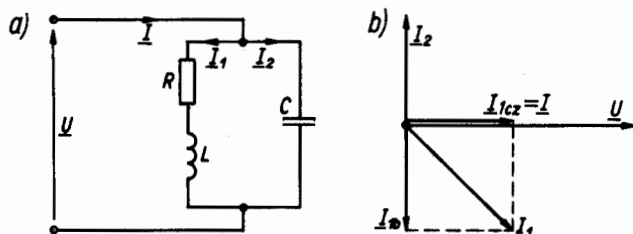
$$\underline{I}_C = j B_C \underline{U} = 5 e^{j90^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_L = -j B_L \underline{U} = 5 e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 1.37b.

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w zadaniu 1.32 przedstawiono wykresy prądów w funkcji częstotliwości na rys. 1.37c.

1.38. Obliczyć pulsację rezonansową, impedancję falową oraz narysować wykres wektorowy obwodu przedstawionego na rys. 1.38a w stanie rezonansu. Obliczyć jaka powinna być pojemność C , aby rezonans nastąpił przy pulsacjach: a) $\omega_{1r} = \omega_0/2$, b) $\omega_{3r} = 2\omega_0$. Dane: $R = 10 \Omega$, $L = 180 \mu\text{H}$, $C = 50 \text{ pF}$.



Rys. 1.38

ROZWIĄZANIE. Impedancja falowa układu

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{180 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-12}}} = 10^3 \sqrt{3,6} \Omega$$

Admitancje poszczególnych gałęzi

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{-jX_C} = j\omega C$$

Rezonans wystąpi w przypadku, gdy $B_1 = B_2$, zatem

$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2}$$

a więc przy pulsacji

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{90 \cdot 10^{-13}} - \left(\frac{10}{18 \cdot 10^{-5}}\right)^2} = 32 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

Wartości pojemności dla poszczególnych ω , obliczamy z zależności

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega_0^2 L^2}$$

a) $\omega_{1r} = \omega_0/2 = 16 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$

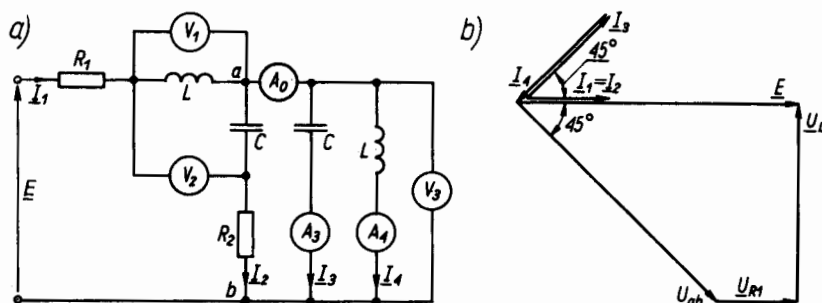
$$C_1 = \frac{18 \cdot 10^{-5}}{10^2 + (16 \cdot 10^4 \cdot 180 \cdot 10^{-6})^2} = 193 \text{ nF}$$

b) $\omega_{3r} = 2\omega_0 = 64 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$

$$C_3 = \frac{18 \cdot 10^{-5}}{10^2 + (64 \cdot 10^4 \cdot 180 \cdot 10^{-6})^2} = 13 \text{ nF}$$

Wykres wektorowy obwodu w stanie rezonansu przedstawiono na rys. 1.38b. W stanie rezonansu $\underline{I}_2 = \underline{I}_{1b}$.

1.39. Obliczyć moc pobieraną przez obwód przedstawiony na rys. 1.39a oraz wskazania przyrządów w tym obwodzie. Wykonać wykres wektorowy. Dane: $\underline{E} = 150 \text{ V}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 30 \Omega$; $X_L = X_C = 30 \Omega$.



Rys. 1.39

ROZWIĄZANIE. W obwodzie występuje rezonans prądów oraz rezonans napięć. Impedancja układu

$$\underline{Z} = R_{\text{ukł}} = R_1 + R_2 = 40 \Omega$$

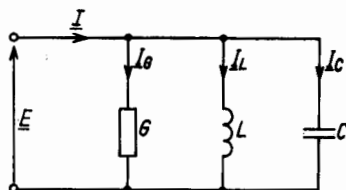
Prąd w obwodzie

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{150 e^{j0^\circ}}{40} = 3,75 \text{ A}$$

Napięcie na zaciskach $a-b$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{E} - (R_1 + jX_L) \underline{I}_1 = 150 - (10 + j30) 3,75 = \\ &= (112,5 - j112,5) = 112,5 \sqrt{2} e^{-j45^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

1.41. W obwodzie jak na rys. 1.41 w stanie rezonansu $i = 2\sqrt{2} \sin 1000t$ A, $Q = 5$, $L = 2$ mH. Obliczyć wartość rezystancji R , pojemności C oraz napięcie zasilania.



Rys. 1.41

ROZWIĄZANIE. Dobroć obwodu

$$Q = \frac{I_L}{I_G} = \frac{I_C}{I_G} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 L G} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

W stanie rezonansu prądów, prąd $I_G = I = 2e^{j0^\circ}$ A, zatem

$$R = \omega_0 L Q = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 10 \Omega$$

oraz

$$C = \frac{Q}{\omega_0 R} = \frac{5}{1000 \cdot 10} = 500 \mu\text{F}$$

Napięcie zasilania

$$\underline{E} = R \underline{I} = 10 \cdot 2 e^{j0^\circ} = 20 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

Prądy gałęziowe

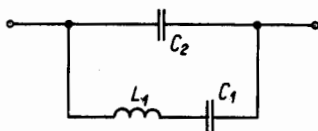
$$\underline{I}_L = \frac{\underline{E}}{jX_L} = \frac{20}{j2} = 10 e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

postać czasowa prądu $i_L(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t - 90^\circ)$ A

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}}{-jX_C} = \frac{20}{-j2} = 10 e^{j90^\circ} \text{ A}$$

postać czasowa prądu $i_C(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t + 90^\circ)$ A.

1.42. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.42 parametry elementów wynoszą: $C_1 = 20 \mu\text{F}$, $C_2 = 40 \mu\text{F}$, $L_1 = 16$ mH. Obliczyć częstotliwości rezonansowe obwodu.



Rys. 1.42

ROZWIĄZANIE. W obwodzie może wystąpić rezonans napięć w układzie szeregowym $L_1 C_1$ oraz rezonans prądów.

Częstotliwość rezonansowa obwodu przy rezonansie napięć

$$f_{0V} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{6,28\sqrt{2 \cdot 10^{-5} \cdot 16 \cdot 10^{-3}}} = \frac{10^4}{6,28 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}} = 282,4 \text{ Hz}$$

Impedancja obwodu

$$\underline{Z} = \frac{j(X_{L1} - X_{C1})(-jX_{C2})}{j(X_{L1} - X_{C1} - X_{C2})} = j \frac{X_{C2}X_{C1} - X_{L1}X_{C2}}{X_{L1} - X_{C2} - X_{C1}}$$

Admitancja obwodu

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = j \frac{X_{C2} + X_{C1} - X_{L1}}{X_{C2}(X_{C1} - X_{L1})}$$

Rezonans prądów wystąpi, gdy $\text{Im } \underline{Y} = 0$, czyli

$$\frac{1}{\omega_0 C_2} + \frac{1}{\omega_0 C_1} - \omega_0 L_1 = 0$$

Po przekształceniach otrzymujemy pulsację i częstotliwość rezonansową przy rezonansie prądów

$$\omega_{0I} = \sqrt{\frac{C_2 + C_1}{L_1 C_2 C_1}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 10^{-6} + 20 \cdot 10^{-6}}{16 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} = 2400 \text{ rad/s}$$

$$f_{0I} = \frac{\omega_{0I}}{2\pi} = \frac{2400}{6,28} = 382 \text{ Hz}$$

1.5. Sprzężenia magnetyczne

1.43. Dwie cewki sprzężone magnetycznie o parametrach $R_1 = 5 \Omega$, $X_{L1} = 10 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $X_{L2} = 20 \Omega$, $X_M = 5 \Omega$ dołączono do źródła napięcia $e = 200 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$. Obliczyć prąd w obwodzie, wskazania woltomierzy i wykonać wykresy wektorowe dla przypadków:

a) sprzężenia dodatniego (rys. 1.43a),

b) sprzężenia ujemnego (rys. 1.43b).

ROZWIĄZANIE

a) Przy nawinięciu zgodnym cewek występuje sprzężenie dodatnie. Impedancja wypadkowa

$$\underline{Z}_w = R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2}) + 2jX_M = (15 + j40) \Omega$$

Prąd w obwodzie

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_w} = \frac{100 + j100}{15 + j40} = 3,05 - j1,38 = 3,35 e^{-j24^\circ} \text{ A}$$

Amperomierz wskazuje $I_A = 3,35 \text{ A}$.

Napięcia $\underline{U}_{ab}$ i $\underline{U}_{bc}$ obliczamy z zależności

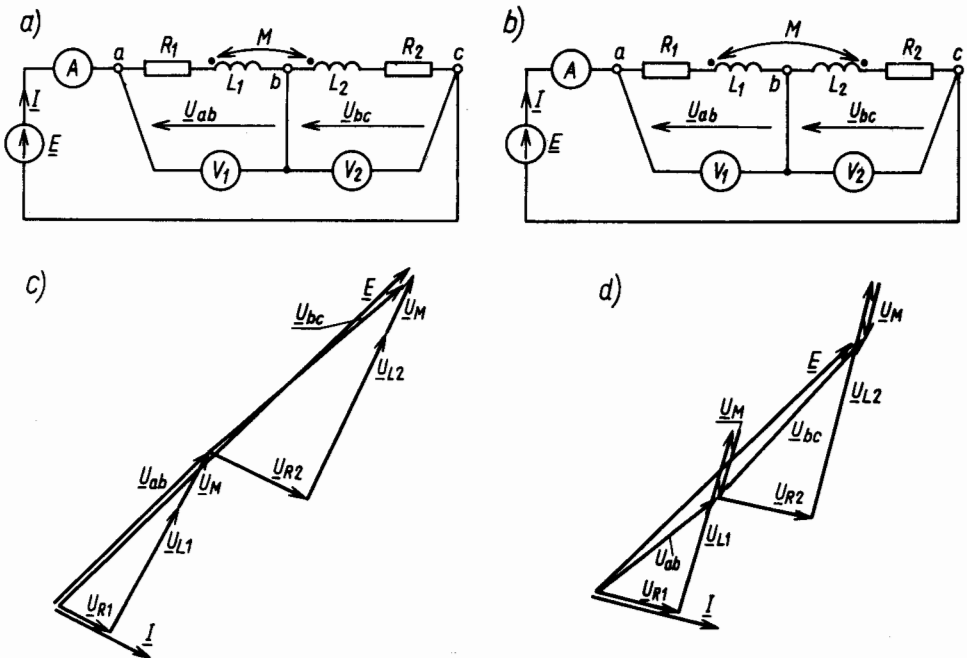
$$\underline{U}_{ab} = [R_1 + j(X_{L1} + X_M)] \underline{I} = (5 + j15) 3,35 e^{-j24^\circ} = 53 e^{j48^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{bc} = [R_2 + j(X_{L2} + X_M)] \underline{I} = (10 + j25) 3,35 e^{-j24^\circ} = 90 e^{j44^\circ} \text{ V}$$

Wskazania woltomierzy wynoszą odpowiednio

$$U_{V1} = 53 \text{ V}; \quad U_{V2} = 90 \text{ V}$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 1.43c.



Rys. 1.43

b) Przy nawinięciu przeciwnym cewek występuje sprzężenie ujemne. Impedancja wypadkowa

$$\underline{Z}_w = R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2}) - 2jX_M = (15 + j20) \Omega$$

Prąd w obwodzie

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_w} = \frac{100 + j100}{15 + j20} = 5,6 - j0,8 = 5,66 e^{-j8^\circ} \text{ A}$$

Amperomierz wskazuje $I_A = 5,66 \text{ A}$.

Napięcia na zaciskach cewki pierwszej i drugiej

$$\underline{U}_{ab} = [R_1 + j(X_{L1} - X_M)] \underline{I} = (5 + j5) 5,66 e^{-j8^\circ} = 40 e^{j37^\circ} \text{ V}$$

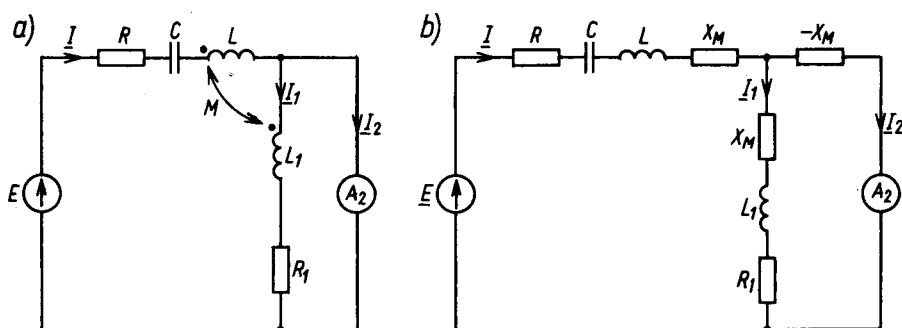
$$\underline{U}_{bc} = [R_2 + j(X_{L2} - X_M)] \underline{I} = (10 + j15) 5,66 e^{-j8^\circ} = 102 e^{j48^\circ} \text{ V}$$

Wskazania woltomierzy wynoszą odpowiednio

$$U_{V1} = 40 \text{ V}; \quad U_{V2} = 102 \text{ V}$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 1.43d.

1.44. Wyznaczyć współczynnik sprzężenia, impedancję wejściową, moc czynną i bierną obwodu (rys. 1.44a) o parametrach: $e = 100 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$, $R = 6 \Omega$, $X_L = X_C = 8 \Omega$, $R_1 = X_{L1} = 2 \Omega$, $X_M = 4 \Omega$.



Rys. 1.44

ROZWIĄZANIE. Zgodnie ze wzorem

$$M = k \sqrt{L L_1}$$

po pomnożeniu obu stron przez ω otrzymamy

$$X_M = k \sqrt{X_L X_{L1}}$$

Obliczamy współczynnik sprzężenia

$$k = \frac{X_M}{\sqrt{X_L X_{L1}}} = \frac{4}{\sqrt{8 \cdot 2}} = 1$$

Sprzężenie między cewkami jest zatem idealne.

Zadanie rozwiążemy metodą klasyczną oraz stosując metodę eliminacji sprzężeń.

a) Metoda klasyczna

Do wyznaczenia impedancji zastępczej układu napiszemy dwa równania dla obwodu z rys. 1.44a, zgodne z drugim prawem Kirchhoffa. W równaniach tych napięcia indukcji wzajemnej mają znak plus, gdyż przy założonych zwrotach

prądów i nawinięć cewek, obydwa prądy dopływają do zacisków jednoimien-
nych. Zatem

$$\underline{E} = [R + j(X_L - X_C)] \underline{I} + jX_M \underline{I}_1$$

$$0 = (R_1 + jX_{L1}) \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}$$

Obliczymy prąd $\underline{I}_1$ z równania drugiego i podstawimy do pierwszego. Wtedy otrzymamy

$$\underline{E} = \left[R + j(X_L - X_C) + \frac{X_M^2}{R_1 + jX_{L1}} \right] \underline{I}$$

Impedancja wejściowa obwodu wynosi

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}} = R + j(X_L - X_C) + \frac{X_M^2}{R_1 + jX_{L1}}$$

Po podstawieniu danych liczbowych

$$\underline{Z}_{we} = 6 + j(8 - 8) + \frac{16}{2 + j2} = (10 - j4) \Omega$$

Moduł impedancji wejściowej

$$Z_{we} = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10,8 \Omega$$

b) Metoda eliminacji sprzężeń

Cewki o indukcyjności L i L_1 , sprzężone magnetycznie, są dołączone zaciskami różnoimiennymi do węzła a . Na rysunku 1.44b przedstawiono schemat zastępczy obwodu z rys. 1.44a po eliminacji sprzężeń. Impedancja wejściowa obwodu z rys. 1.44b

$$\underline{Z}_{we} = \underline{Z} + \frac{\underline{Z}_1(-jX_M)}{\underline{Z}_1 - jX_M} = 6 + j4 + \frac{(2 + j6)(-j4)}{2 + j2} = (10 - j4) \Omega$$

gdzie:

$$\underline{Z} = R - jX_C + j(X_L + X_M) = (6 + j4) \Omega$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} + X_M) = (2 + j6) \Omega$$

Impedancje wejściowe obliczone metodą klasyczną oraz metodą eliminacji sprzężeń mają identyczne wartości. Obwody ze sprzężeniami można zatem rozwiązywać obydwoma metodami.

Wartość prądu wejściowego

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{we}} = \frac{50 + j50}{10 - j4} = (2,58 + j6) \text{ A}$$

Prądy gałęziowe obliczamy z zależności

$$\underline{I}_1 = \frac{-jX_M \underline{I}}{R_1 + jX_{L1}} = \frac{-j4(2,58 + j6)}{2 + j2} = (3,42 - j8,58) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1 = (-0,84 + j14,58) \text{ A}$$

Wskazanie amperomierza A_2 wynosi

$$I_{A2} = \sqrt{0,84^2 + 14,58^2} = 14,6 \text{ A}$$

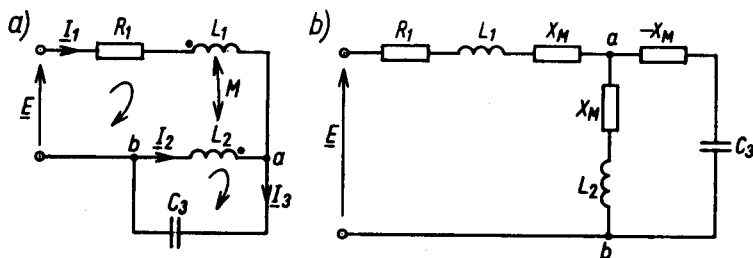
Moc pozorna zespolona układu

$$\underline{S} = \underline{E} \underline{I}^* = (50 + j50)(2,58 - j6) = (429 - j171) \text{ V} \cdot \text{A}$$

zatem

$$P = 429 \text{ W} \quad \text{oraz} \quad Q = -171 \text{ var}$$

1.45. Wyznaczyć prąd $\underline{I}_1$ dopływający do obwodu przedstawionego na rys. 1.45a. Parametry obwodu są następujące: $R_1 = 10 \Omega$, $X_{L1} = 25 \Omega$, $X_{L2} = 40 \Omega$, $X_M = 10 \Omega$, $X_{C3} = 20 \Omega$, napięcie przyłożone $\underline{E} = 100 \text{ V}$.



Rys. 1.45

ROZWIĄZANIE. Zadanie rozwiążemy dwiema metodami: metodą klasyczną oraz metodą eliminacji sprzężeń magnetycznych.

a) Metoda klasyczna

Na rysunku 1.45a zaznaczono zwroty obiegowe oczek oraz zwroty prądów w gałęziach. Napiszemy dwa równania zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa i jedno równanie zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa

$$\underline{E} = (R_1 + jX_{L1}) \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2 - jX_{C3} \underline{I}_3$$

$$0 = jX_{L2} \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1 - jX_{C3} \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Znak minus przy reaktancji indukcji wzajemnej wynika ze zwrotów prądów $\underline{I}_1$ oraz $\underline{I}_2$ względem zacisków jednoimiennych oznaczonych kropkami.

Rozwiązując układ równań i upraszczając, otrzymamy

$$\underline{I}_2 = \frac{X_M + X_{C3}}{X_{L2} - X_{C3}} \underline{I}_1$$

$$\underline{E} = (R_1 + jX_{L1}) \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2 - jX_{C3}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

Po wyeliminowaniu prądu $\underline{I}_2$

$$\underline{E} = \left[R_1 + jX_{L1} - jX_{C3} - j \frac{(X_{C3} + X_M)^2}{X_{L2} - X_{C3}} \right] \underline{I}_1$$

stąd

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_w}$$

przy czym impedancja wypadkowa

$$\begin{aligned} \underline{Z}_w &= R_1 + jX_{L1} - jX_{C3} - j \frac{(X_{C3} + X_M)^2}{X_{L2} - X_{C3}} = \\ &= 10 + j25 - j20 - j \frac{30^2}{20} = (10 - j40) \Omega \end{aligned}$$

Ostatecznie prąd wejściowy w postaci zespolonej

$$\underline{I}_1 = \frac{100}{10 - j40} = (0,59 + j2,36) \text{ A}$$

b) Metoda eliminacji sprzężeń

Cewki ze sobą sprzężone magnetycznie, o indukcyjnościach L_1 i L_2 , są dołączone do wspólnego węzła a zaciskami różnoimiennymi. Wobec tego, zgodnie ze schematem podanym na rys. 1.45b, impedancje $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ wynoszą

$$\underline{Z}_1 = jX_{L1} + jX_M = j35 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = jX_{L2} + jX_M = j50 \Omega$$

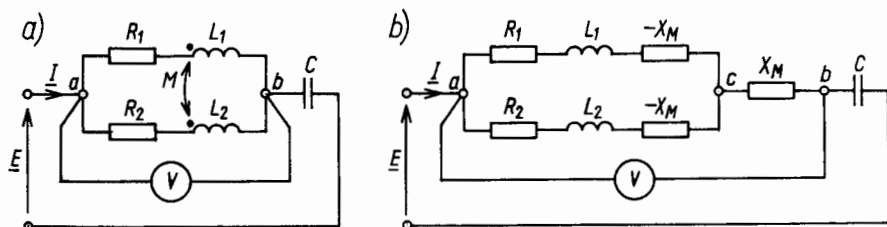
$$\underline{Z}_3 = -jX_{C3} - jX_M = -j30 \Omega$$

Ze struktury schematu zastępczego wynika, że

$$\underline{Z}_w = \underline{Z}_1 + R_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 10 + j35 + \frac{(j50)(-j30)}{j20} = (10 - j40) \Omega$$

Taką samą wartość impedancji wypadkowej $\underline{Z}_w$ obliczyliśmy metodą a), zatem otrzymamy identyczną wartość prądu $\underline{I}_1$.

1.46. Obliczyć wartość pojemności C , aby w obwodzie przedstawionym na rys. 1.46a wystąpił rezonans napięć. Dla stanu rezonansu obliczyć prąd w obwodzie oraz wskazanie woltomierza. Dane: $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $X_{L1} = 10 \Omega$, $X_{L2} = 40 \Omega$, $k = 0,5$, $\underline{E} = 50 e^{j45^\circ} \text{ V}$.



Rys. 1.46

ROZWIĄZANIE. Na rysunku 1.46b przedstawiono schemat zastępczy obwodu z rys. 1.46a po eliminacji sprzężeń. Reaktancja indukcji wzajemnej

$$X_M = k \sqrt{X_{L1} X_{L2}} = 0,5 \sqrt{10 \cdot 40} = 10 \Omega$$

Impedancja wypadkowa obwodu

$$\underline{Z}_w = \frac{[R_1 + j(X_{L1} - X_M)][R_2 + j(X_{L2} - X_M)]}{R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} - 2jX_M)} + jX_M - jX_C$$

$$\underline{Z}_w = 8,46 + j2,3 + j10 - jX_C = 8,46 + j(12,3 - X_C)$$

Aby wystąpił rezonans napięć, część urojona impedancji wypadkowej musi być równa zero ($\text{Im} \underline{Z}_w = 0$). Zatem

$$12,3 - X_C = 0, \quad \text{stad} \quad X_C = 12,3 \Omega$$

Pojemność C wynosi

$$C = \frac{1}{\omega \cdot 12,3} = \frac{1}{314 \cdot 12,3} = 258 \mu\text{F}$$

Prąd w obwodzie w stanie rezonansu jest w fazie z napięciem zasilania

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_w} = \frac{50 e^{j45^\circ}}{8,46} = 5,91 e^{j45^\circ} \text{ A}$$

Woltomierz mierzy napięcie zgodne z rys. 1.46b

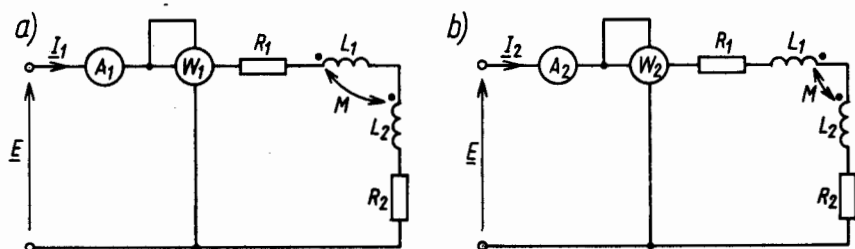
$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} = \underline{U}_V &= (\underline{Z}_{ac} + jX_M) \underline{I} = (8,46 + j12,3) 5,91 e^{j45^\circ} = \\ &= 14,92 e^{j55^\circ} \cdot 5,91 e^{j45^\circ} = 88,2 e^{j100^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

Zatem wskazanie woltomierza wynosi

$$U_V = 88,2 \text{ V}$$

1.47. Dwie cewki rzeczywiste o parametrach $R_1 L_1$ oraz $R_2 L_2$, sprzężone magnetycznie, zostały połączone szeregowo raz zgodnie, a raz przeciwnie. W przypadku połączenia zgodnego (rys. 1.47a) wskazanie amperomierza

wynosiło $I_1 = 4$ A, a watomierza $P_1 = 96$ W. W przypadku połączenia przeciwnego (rys. 1.47b) wskazanie amperomierza wynosiło $I_2 = 6$ A, a watomierza $P_2 = 216$ W. Obliczyć indukcyjność wzajemną M , jeśli napięcie źródła zasilania wynosi $e = 60\sqrt{2} \sin 314t$ V.



Rys. 1.47

ROZWIĄZANIE

a) dla połączenia zgodnego — impedancja, rezystancja oraz reaktancja obwodu z rys. 1.47a wynoszą odpowiednio

$$Z_{11} = \frac{E}{I_1} = \frac{60}{4} = 15 \Omega$$

$$R_{11} = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{96}{16} = 6 \Omega$$

$$X_{11} = \sqrt{Z_{11}^2 - R_{11}^2} = 13,75 \Omega$$

b) dla połączenia przeciwnego — impedancja, rezystancja oraz reaktancja obwodu z rys. 1.47b wynoszą odpowiednio

$$Z_{22} = \frac{E}{I_2} = \frac{60}{6} = 10 \Omega$$

$$R_{22} = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{216}{36} = 6 \Omega$$

$$X_{22} = \sqrt{Z_{22}^2 - R_{22}^2} = 8 \Omega$$

Reaktancje wypadkowe dla obydwu przypadków wynoszą odpowiednio

$$X_{11} = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M$$

$$X_{22} = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M$$

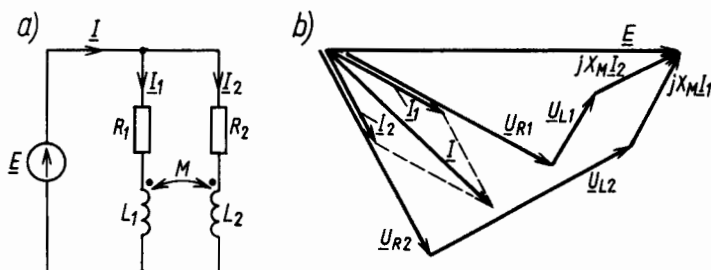
Po przekształceniu otrzymujemy

$$4X_M = 4\omega M = X_{11} - X_{22}$$

stąd

$$M = \frac{X_{11} - X_{22}}{4\omega} = \frac{13,75 - 8}{4 \cdot 314} = 4,5 \text{ mH}$$

1.48. Obliczyć moc czynną i bierną obwodu przedstawionego na rys. 1.48a, którego parametry wynoszą: $R_1 = R_2 = 20 \Omega$, $X_{L1} = 10 \Omega$, $X_{L2} = 20 \Omega$, $X_M = 10 \Omega$, $E = 100 \text{ V}$. Wykonać wykres wektorowy.



Rys. 1.48

ROZWIĄZANIE. W obwodzie na rys. 1.48a cewki sprzężone mają jednakowo usytuowane zaciski jednoimienne względem węzła; zachodzi zatem sprzężenie dodatnie. Obwód ten opisują następujące równania:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

$$\underline{E} = (R_1 + jX_{L1}) \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2$$

$$\underline{E} = (R_2 + jX_{L2}) \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_1$$

Po przekształceniu otrzymujemy wartości prądów

$$\underline{I}_1 = \underline{E} \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{100(20 + j10)}{(20 + j10)(20 + j20) + 100} = 2,66 - j2 = 3,3 e^{-j37^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{E} \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{100 \cdot 20}{300 + j600} = 1,33 - j2,66 = 3 e^{-j63^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 4 - j4,66 = 6,14 e^{-j49^\circ} \text{ A}$$

Moc pozorna zespolona

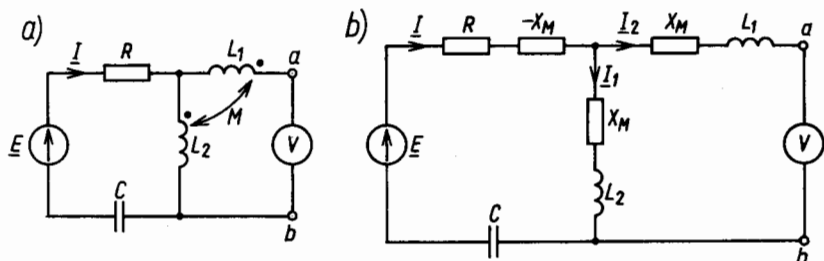
$$\underline{S} = \underline{E} \underline{I}^* = 100(4 + j4,66) = (400 + j466) \text{ V} \cdot \text{A}$$

Zatem moc czynna i bierna obwodu wynoszą odpowiednio

$$P = 400 \text{ W} \quad \text{oraz} \quad Q = 466 \text{ var}$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 1.48b.

1.49. Obliczyć wskazanie woltomierza w obwodzie (rys. 1.49a), którego parametry wynoszą: $\underline{E} = 100 \text{ V}$, $R = X_C = 20 \Omega$, $X_{L1} = 10 \Omega$, $X_{L2} = 40 \Omega$, $X_M = 10 \Omega$.



Rys. 1.49

ROZWIĄZANIE. W obwodzie na rys. 1.49a cewki sprzężone mają przeciwnie usytuowane zaciski jednoimienne względem wspólnego węzła. Występuje zatem sprzężenie ujemne. Na rysunku 1.49b przedstawiono schemat zastępczy po eliminacji sprzężeń z rys. 1.49a.

W obwodzie z rys. 1.49b prądy wynoszą

$$\underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{R + j(X_{L2} + X_M - X_M - X_C)} = \frac{100}{20 + j20} = (2,5 - j2,5) \text{ A}$$

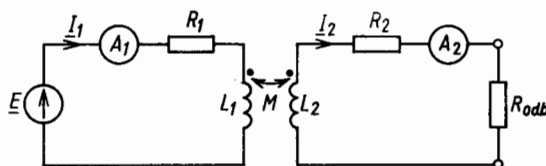
Woltomierz mierzy napięcie

$$\underline{U}_V = j(X_{L2} + X_M) \underline{I}_1 = j50(2,5 - j2,5) = 125 + j125 = 125\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ V}$$

Zatem wskazanie woltomierza wynosi

$$U_V = 125\sqrt{2} \text{ V}$$

1.50. Transformator powietrzny o parametrach $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $X_{L1} = 40 \Omega$, $X_{L2} = 90 \Omega$ jest zasilany ze źródła $\underline{E} = 60 \text{ V}$ (rys. 1.50). Współczynnik sprzężenia uzwojeń $k = 0,5$. Obliczyć prądy oraz wskazania amperomierzy w uzwojeniu pierwotnym i wtórnym, jeżeli do zacisków wtórnych dołączono $R_{odb} = 10 \Omega$.



Rys. 1.50

ROZWIĄZANIE. Uwzględniając, że prądy $\underline{I}_1$ oraz $\underline{I}_2$ mają różne zwroty względem zacisków jednoimiennych, obwód opisują równania

$$\underline{E} = R_1 \underline{I}_1 + jX_{L1} \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2$$

$$0 = R_2 \underline{I}_2 + jX_{L2} \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1 + R_{odb} \underline{I}_2$$

Wprowadzimy oznaczenia:

— impedancja własna uzwojenia pierwotnego

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + jX_{L1} = R_{11} + jX_{11} = (30 + j40) \Omega$$

— impedancja własna uzwojenia wtórnego

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + jX_{L2} + R_{odb} = R_{22} + jX_{22} = (30 + j90) \Omega$$

— reaktancja indukcji wzajemnej

$$X_M = k \sqrt{X_{L1} X_{L2}} = 0,5 \sqrt{40 \cdot 90} = 30 \Omega$$

— impedancja zespolona indukcji wzajemnej

$$\underline{Z}_M = jX_M = j30 \Omega$$

Obliczamy impedancję wejściową transformatora

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{we} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}_1} &= \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_{22}} = R_{11} + jX_{11} + \frac{R_{22} X_M^2}{\underline{Z}_{22}^2} - j \frac{X_{22} X_M^2}{\underline{Z}_{22}^2} = \\ &= R_{11} + R' + j(X_{11} - X') \end{aligned}$$

przy czym rezystancja sprowadzona R' i reaktancja sprowadzona X' wynoszą odpowiednio

$$R' = \frac{R_{22} X_M^2}{\underline{Z}_{22}^2} = \frac{30 \cdot 30^2}{30^2 + 90^2} = 3 \Omega$$

$$X' = \frac{X_{22} X_M^2}{\underline{Z}_{22}^2} = \frac{90 \cdot 30^2}{30^2 + 90^2} = 9 \Omega$$

Zatem

$$\underline{Z}_{we} = 30 + 3 + j(40 - 9) = (33 + j31) \Omega$$

Mając wyznaczoną impedancję wejściową transformatora, obliczamy prąd w uzwojeniu pierwotnym

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{we}} = \frac{60 e^{j0}}{33 + j31} = (1 - j0,9) = 1,35 e^{-j42^\circ} \text{ A}$$

postać czasowa prądu $i_1(t) = 1,35 \sqrt{2} \sin(\omega t - 42^\circ) \text{ A}$.

Korzystając z równań opisujących obwód, obliczamy prąd

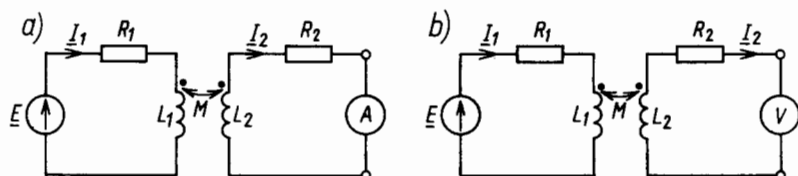
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{22}} \underline{I}_1 = \frac{j30}{30 + j90} (1 - j0,9) = (-0,21 + j0,37) = 0,42 e^{j120^\circ} \text{ A}$$

postać czasowa prądu $i_2(t) = 0,42 \sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ A}$.

Wskazania amperomierzy wynoszą odpowiednio

$$I_{A1} = 1,35 \text{ A} \quad \text{oraz} \quad I_{A2} = 0,42 \text{ A}$$

1.51. Transformator powietrzny o parametrach: $k = 0,8$, $R_1 = R_2 = 20 \, \Omega$, $X_{L1} = X_{L2} = 40 \, \Omega$ dołączono do źródła $\underline{E} = 200 \text{ V}$. Obliczyć wskazania: a) amperomierza (rys. 1.51a) i b) woltomierza (rys. 1.51b) przyłączonych do zacisków uzwojenia wtórnego.



Rys. 1.51

ROZWIĄZANIE. Reaktancja wzajemna

$$X_M = k \sqrt{X_{L1} X_{L2}} = 0,8 \sqrt{40 \cdot 40} = 32 \, \Omega$$

a) Przyłączenie amperomierza do zacisków wtórnych jest równoznaczne ze zwarcie uzwojenia wtórnego. Obwód z rys. 1.51a opisują równania

$$\underline{E} = (R_1 + jX_{L1}) \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2$$

$$0 = (R_2 + jX_{L2}) \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1$$

Znak minus napięcia indukcji wzajemnej wynika stąd, że prądy $\underline{I}_1$ oraz $\underline{I}_2$ mają różne zwroty względem zacisków jednoimiennych.

Po wyznaczeniu prądu $\underline{I}_1$ z równania drugiego

$$\underline{I}_1 = \frac{R_2 + jX_{L2}}{jX_M} \underline{I}_2$$

i podstawieniu do równania pierwszego

$$\underline{E} = \left[\frac{(R_1 + jX_{L1})(R_2 + jX_{L2})}{jX_M} - jX_M \right] \underline{I}_2$$

otrzymujemy prąd w uzwojeniu wtórnym

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{E} \frac{jX_M}{(R_1 + jX_{L1})(R_2 + jX_{L2}) + X_M^2} = 200 \frac{j32}{(20 + j40)(20 + j40) + 1024} = \\ &= 3,95 - j0,43 = 3,97 e^{-j6^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

Wskazanie amperomierza wynosi

$$I_A = 3,97 \text{ A}$$

Prąd w uzwojeniu pierwotnym przy zwarcu zacisków wtórnych

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \frac{R_2 + jX_{L2}}{jX_M} = \frac{(3,95 - j0,43)(20 + j40)}{j32} = \\ &= 4,66 - j3 = 5,5 e^{-j32^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

b) Po dołączeniu woltomierza (rys. 1.51b) uzwojenie wtórne jest w stanie jałowym, zatem $I_2 = 0$.

Prąd w uzwojeniu pierwotnym

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{R_1 + jX_{L1}} = \frac{200}{20 + j40} = 2 - j4 = 4,47 e^{-j63^\circ} \text{ A}$$

W uzwojeniu wtórnym indukuje się napięcie

$$\underline{U}_2 = jX_M \underline{I}_1 = 32 e^{j90^\circ} \cdot 4,47 e^{j63^\circ} = 143 e^{j27^\circ} \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza wynosi

$$U_V = 143 \text{ V}$$

1.52. Na rysunku 1.52a przedstawiono uproszczony schemat ideowy transformatora obciążonego kondensatorem o pojemności C_2 i rezystorem o rezystancji R_2 . Indukcyjności własne uzwojenia pierwotnego i wtórnego transformatora oraz indukcyjność wzajemna wynoszą odpowiednio L_1 , L_2 , $M = k\sqrt{L_1 L_2}$. Wyznaczyć: a) impedancję wejściową układu, narysować wykres modułu tej impedancji w funkcji pulsacji ω ; b) częstotliwość, przy której w obwodzie wtórnym transformatora wystąpi rezonans napięć.

ROZWIĄZANIE

a) Dla oczka pierwszego i drugiego piszemy równania wynikające z drugiego prawa Kirchhoffa

$$\underline{U} = jX_{L1} \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2$$

$$0 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1$$

$$\text{przy czym } X_{L1} = \omega L_1, X_M = \omega M, \underline{Z}_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

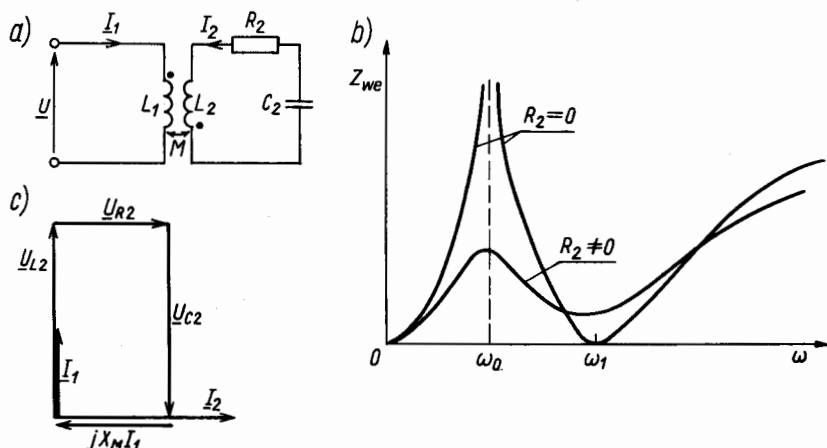
Po przekształceniu tego układu równań otrzymujemy

$$\underline{U} = \frac{X_M^2 + jX_{L1} \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} \underline{I}_1 = \underline{Z}_{we} \underline{I}_1$$

Stąd

$$\underline{Z}_{we} = \frac{X_M^2 + jX_{L1}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{X_M^2}{\underline{Z}_2} + jX_{L1}$$

Wykres modułu impedancji w funkcji pulsacji jest przedstawiony na rys. 1.52b. Z rysunku wynika, że rezystancja R_2 ma znaczny wpływ na przebieg impedancji wejściowej układu. Część tej rezystancji bądź cała jej wartość może modelować straty mocy czynnej w uzwojeniu wtórnym transformatora.



Rys. 1.52

b) Przy wyznaczaniu częstotliwości rezonansowej obwodu wtórnego należy określić między jakimi elementami wystąpi rezonans napięć. W modelu fizycznym transformatora na zaciskach uzwojenia wtórnego występuje napięcie

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1$$

Jeśli przyjąć, że rezonans napięć wystąpi między tak zdefiniowanym uzwojeniem wtórnym a kondensatorem, to można wykazać, że przy $R_2 \neq 0$ nie istnieje częstotliwość, przy której zachodziłaby równość

$$j\omega L_2 \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1 = j \frac{1}{\omega C_2} \underline{I}_2$$

Istotnie, jeśli podstawimy do powyższej równości wyznaczone z wcześniej napisanego układu równań prądy $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$, to otrzymamy

$$\frac{j\omega L_2 X_M}{X_{L1} \underline{Z}_2 - jX_M^2} - \frac{\underline{Z}_2 X_M}{X_{L1} \underline{Z}_2 - jX_M^2} = \frac{j \frac{1}{\omega C_2} X_M}{X_{L1} \underline{Z}_2 - jX_M^2}$$

Stąd po uproszczeniu otrzymujemy sprzeczność, gdyż

$$j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) \neq R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

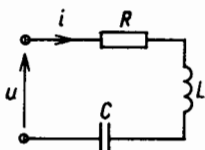
A zatem rezonans napięć nie wystąpi między kondensatorem a zdefiniowanym w powyższy sposób uzwojeniem wtórnym transformatora. Rezonans wystąpi natomiast między kondensatorem a uzwojeniem wtórnym określonym tylko przez indukcyjność własną. Jeśli tak, to

$$j2\pi f_0 L_2 \underline{I}_2 = j \frac{1}{2\pi f_0 C_2} \underline{I}_2 \quad \text{oraz} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_2 C_2}}$$

Z powyższych rozważań wynika, że nie jest możliwe stwierdzenie rezonansu napięć przez pomiar napięcia na kondensatorze i uzwojeniu wtórnym transformatora. Należy w tym celu wykorzystać inne właściwości obwodu: maksimum modułu impedancji wejściowej oraz minimum modułu prądu po stronie pierwotnej, a maksimum — po stronie wtórnej. Charakterystyczne jest również to, że kąt przesunięcia fazowego prądu strony pierwotnej względem prądu strony wtórnej jest równy 90° (rys. 1.52c).

1.6. Przebiegi odkształcone w obwodach elektrycznych

1.53. Obliczyć wartość chwilową napięcia zasilającego obwód (rys. 1.53) o parametrach: $R = 40 \, \Omega$, $L = 0,1 \, \text{H}$, $C = 100 \, \mu\text{F}$, gdy dane jest napięcie na kondensatorze $u_C = [20 + 100\sqrt{2} \sin(200t - 60^\circ)] \, \text{V}$.



Rys. 1.53

ROZWIĄZANIE. Wartość chwilowa prądu w obwodzie

$$i = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-4} \cdot 100 \sqrt{2} \cdot 200 \cos(200t - 60^\circ) = 2\sqrt{2} \sin(200t + 30^\circ) \, \text{A}$$

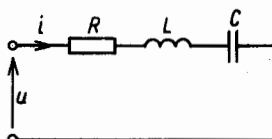
Wartość chwilowa napięcia zasilającego

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = 40 \cdot 2\sqrt{2} \sin(200t + 30^\circ) + \\ &+ 0,1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 200 \cos(200t + 30^\circ) + 20 + 100\sqrt{2} \sin(200t - 60^\circ) = \\ &= 20 + 100\sqrt{2} \sin(200t - 60^\circ) + 80\sqrt{2} \sin(200t + 30^\circ) + \\ &\quad + 40\sqrt{2} \sin(200t + 120^\circ) \end{aligned}$$

Sumując przebiegi sinusoidalne, otrzymamy

$$u(t) = [20 + 100\sqrt{2} \sin(200t - 7^\circ)] \, \text{V}$$

1.54. Obwód przedstawiony na rys. 1.54 jest zasilany odkształconym napięciem $u = [40 + 160\sqrt{2} \sin \omega_1 t + 80\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 75^\circ)]$ V. Parametry obwodu dla pierwszej harmonicznej wynoszą: $R = 40 \Omega$, $\omega_1 L = 20 \Omega$, $1/\omega_1 C = 60 \Omega$. Obliczyć moc czynną, bierną i pozorną obwodu.



Rys. 1.54

ROZWIĄZANIE. Wartość skuteczna napięcia zasilającego

$$U = \sqrt{U_{(0)}^2 + U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2} = \sqrt{40^2 + 160^2 + 80^2} = 183,3 \text{ V}$$

Dla składowej stałej prąd w obwodzie nie płynie: $I_{(0)} = 0$.

Impedancja obwodu:

— dla pierwszej harmonicznej

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right) = (40 - j40) = 40\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \Omega$$

— dla trzeciej harmonicznej

$$\underline{Z}_{(3)} = R + j\left(3\omega_1 L - \frac{1}{3\omega_1 C}\right) = (40 + j40) = 40\sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega$$

Wartość skuteczna zespolona prądu:

— dla pierwszej harmonicznej

$$\underline{I}_{(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{160 e^{j0^\circ}}{40\sqrt{2} e^{-j45^\circ}} = 2\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ A}$$

— dla trzeciej harmonicznej

$$\underline{I}_{(3)} = \frac{80 e^{j75^\circ}}{40\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = \sqrt{2} e^{j30^\circ} \text{ A}$$

Wartość skuteczna prądu odkształconego

$$I = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10} \text{ A}$$

Wartość chwilowa prądu w obwodzie

$$i(t) = [4 \sin(\omega_1 t + 45^\circ) + 2 \sin(3\omega_1 t + 30^\circ)] \text{ A}$$

Moc czynna

$$P = P_{(1)} + P_{(3)} = U_{(1)} I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} + U_{(3)} I_{(3)} \cos \varphi_{(3)} = \\ = 160 \cdot 2 \sqrt{2} \cos(-45^\circ) + 80 \sqrt{2} \cos 45^\circ = 400 \text{ W}$$

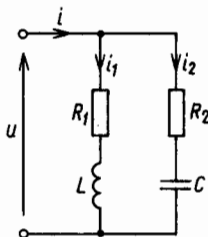
Moc bierna

$$Q = Q_{(1)} + Q_{(3)} = U_{(1)} I_{(1)} \sin \varphi_{(1)} + U_{(3)} I_{(3)} \sin \varphi_{(3)} = \\ = 160 \cdot 2 \sqrt{2} \sin(-45^\circ) + 80 \sqrt{2} \sin 45^\circ = -240 \text{ var}$$

Moc pozorna

$$S = UI = 580 \text{ V} \cdot \text{A}$$

1.55. Do zacisków obwodu przedstawionego na rys. 1.55 przyłożono napięcie niesinusoidalne $u = [60 + 120\sqrt{2} \sin \omega_1 t + 80\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 45^\circ)] \text{ V}$. Parametry obwodu dla pierwszej harmonicznej wynoszą: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $\omega_1 L = 20 \Omega$, $1/\omega_1 C = 30 \Omega$. Obliczyć wartości chwilowe prądów oraz moc czynną.



Rys. 1.55

ROZWIĄZANIE. Wartość skuteczna napięcia zasilającego

$$U = \sqrt{60^2 + 120^2 + 80^2} = 156,2 \text{ V}$$

Obliczamy rozptyły prądów:

— od składowej stałej

$$I_{(0)} = I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_1} = \frac{60}{20} = 3 \text{ A} \quad \text{oraz} \quad I_{2(0)} = 0$$

— od pierwszej harmonicznej

$$\underline{I}_{1(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{R_1 + j\omega_1 L} = \frac{120}{20 + j20} = 3\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{2(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{R_2 - j\frac{1}{\omega_1 C}} = \frac{120}{40 - j30} = 2,4 e^{j37^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{(1)} = \underline{I}_{1(1)} + \underline{I}_{2(1)} = (4,92 - j1,56) = 5,16 e^{-j17^\circ} \text{ A}$$

— od trzeciej harmonicznej

$$\underline{I}_{1(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{R_1 + 3j\omega_1 L} = \frac{80 e^{j45^\circ}}{20 + j60} = 1,26 e^{-j27^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{2(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{R_2 - j \frac{1}{3\omega_1 C}} = \frac{80 e^{j45^\circ}}{40 - j10} = 1,94 e^{j59^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{(3)} = \underline{I}_{1(3)} + \underline{I}_{2(3)} = (2,12 + j1,11) = 2,39 e^{j27^\circ} \text{ A}$$

Wartości chwilowe prądów

$$i_1(t) = [3 + 6 \sin(\omega_1 t + 45^\circ) + 1,78 \sin(3\omega_1 t - 27^\circ)] \text{ A}$$

$$i_2(t) = [3,4 \sin(\omega_1 t + 37^\circ) + 2,74 \sin(3\omega_1 t + 59^\circ)] \text{ A}$$

$$i(t) = [3 + 5,16 \sqrt{2} \sin(\omega_1 t - 17^\circ) + 2,39 \sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 27^\circ)] \text{ A}$$

Wartości skuteczne prądów

$$I_1 = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2 + 1,26^2} = 5,35 \text{ A}$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(1)}^2 + I_{2(3)}^2} = \sqrt{2,4^2 + 1,94^2} = 3,08 \text{ A}$$

$$I = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2} = \sqrt{3^2 + 5,16^2 + 2,39^2} = 6,43 \text{ A}$$

Moc czynną w obwodzie można obliczyć z zależności

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 20 \cdot 5,35^2 + 40 \cdot 3,08^2 = 952 \text{ W}$$

lub

$$\begin{aligned} P &= U_{(0)} I_{(0)} + U_{(1)} I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} + U_{(3)} I_{(3)} \cos \varphi_{(3)} = \\ &= 60 \cdot 3 + 120 \cdot 5,16 \cos(-17^\circ) + 80 \cdot 2,39 \cos 18^\circ = 952 \text{ W} \end{aligned}$$

1.56. Obwód przedstawiony na rys. 1.56 zasilono napięciem niesinusoidalnym $u = [40 + 100\sqrt{2} \sin(\omega_1 t + 90^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 45^\circ)] \text{ V}$. Parametry obwodu dla pierwszej harmonicznej: $R_1 = R_4 = 10 \Omega$, $\omega_1 L = 5 \Omega$, $1/\omega_1 C = 45 \Omega$. Obliczyć wskazanie woltomierza oraz wskazania amperomierzy.

ROZWIĄZANIE. Po włączeniu woltomierza, prąd $i_4 = 0$. Obliczamy następujące wielkości:

— dla składowej stałej

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_1} = \frac{40}{10} = 4 \text{ A}; \quad I_{3(0)} = 0; \quad U_{ab(0)} = 0$$

— dla pierwszej harmonicznej

$$\begin{aligned}\underline{I}_{1(1)} &= \frac{\underline{U}_{(1)}}{R_1 + \frac{(j\omega_1 L)\left(-j\frac{1}{\omega_1 C}\right)}{j\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)}} = \frac{100 e^{j90^\circ}}{10 + \frac{j5(-j45)}{j(5-45)}} = \\ &= \frac{100 e^{j90^\circ}}{10 + j5,625} = \frac{100 e^{j90^\circ}}{11,47 e^{j30^\circ}} = 8,7 e^{j60^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

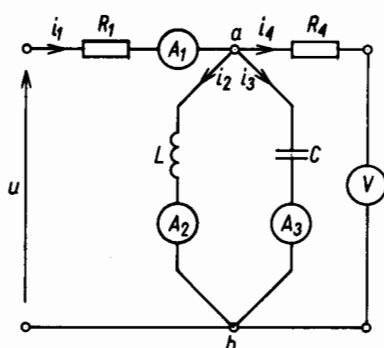
$$\underline{U}_{ab(1)} = \underline{Z}_{ab(1)} \underline{I}_{1(1)} = 8,7 e^{j60^\circ} \cdot 5,625 e^{j90^\circ} = 48,9 e^{j150^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{I}_{2(1)} = \frac{\underline{U}_{ab(1)}}{j\omega_1 L} = \frac{48,9 e^{j150^\circ}}{5 e^{j90^\circ}} = 9,78 e^{j60^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{3(1)} = \frac{\underline{U}_{ab(1)}}{-j\frac{1}{\omega_1 C}} = \frac{48,9 e^{j150^\circ}}{45 e^{-j90^\circ}} = 1,08 e^{j240^\circ} \text{ A}$$

— dla trzeciej harmonicznej

$$X_{L(3)} = 3\omega_1 L = 15 \Omega; \quad X_{C(3)} = \frac{1}{3\omega_1 C} = 15 \Omega$$



Rys. 1.56

W gałęziach równoległych zachodzi rezonans prądów, zatem prąd $I_{1(3)} = 0$, a napięcie $\underline{U}_{ab(3)} = \underline{U}_{(3)} = 60 e^{j45^\circ} \text{ V}$.

Prądy w gałęziach równoległych

$$\underline{I}_{2(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{jX_{L(3)}} = \frac{60 e^{j45^\circ}}{15 e^{j90^\circ}} = 4 e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{3(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{-jX_{C(3)}} = \frac{60 e^{j45^\circ}}{15 e^{-j90^\circ}} = 4 e^{j135^\circ} \text{ A}$$

Wskazanie woltomierza wynosi

$$U_V = \sqrt{U_{V(0)}^2 + U_{V(1)}^2 + U_{V(3)}^2} = \sqrt{0 + 48,9^2 + 60^2} = 77,4 \text{ V}$$

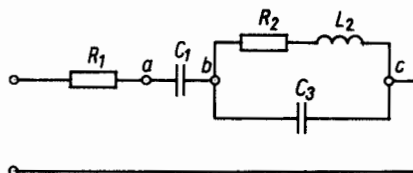
Wskazania amperomierzy wynoszą odpowiednio

$$I_{A1} = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2} = \sqrt{4^2 + 8,7^2} = 9,57 \text{ A}$$

$$I_{A2} = \sqrt{I_{2(0)}^2 + I_{2(1)}^2 + I_{2(3)}^2} = \sqrt{4^2 + 9,78^2 + 4^2} = 11,3 \text{ A}$$

$$I_{A3} = \sqrt{I_{3(1)}^2 + I_{3(3)}^2} = \sqrt{1,08^2 + 4^2} = 4,14 \text{ A}$$

1.57. Dobrać wartość pojemności C_3 tak, aby przy $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$ w obwodzie jak na rys. 1.57 występował rezonans prądów, oraz wartość C_1 tak, aby przy $\omega_3 = 3\omega_1 = 3000 \text{ rad/s}$ występował rezonans napięć. Dane: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $L_2 = 40 \text{ mH}$.



Rys. 1.57

ROZWIĄZANIE. Admitancje gałęzi równoległych dla pulsacji ω_1 wynoszą

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2 + j\omega_1 L_2} = \frac{1}{40 + j40} = (0,0125 - j0,0125) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = j\omega_1 C_3 = j1000 C_3 \text{ S}$$

Rezonans prądów wystąpi, gdy susceptancje poszczególnych gałęzi będą sobie równe: $B_2 = B_3$; zatem z tej zależności obliczamy wartość pojemności C_3

$$0,0125 = 1000 C_3, \text{ stąd } C_3 = 12,5 \mu\text{F}$$

Rezonans napięć wystąpi w obwodzie dla ω_3 , gdy $\text{Im} \underline{Z}_{ac(3)} = 0$.

Impedancja $\underline{Z}_{ac(3)}$ wynosi

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ac(3)} &= \frac{(R_2 + j\omega_3 L_2) \left(-j \frac{1}{\omega_3 C_3} \right)}{R_2 + j \left(\omega_3 L_2 - \frac{1}{\omega_3 C_3} \right)} - j \frac{1}{\omega_3 C_1} = \\ &= \frac{(40 + j120)(-j26,67)}{40 + j93,3} - j \frac{1}{3000 C_1} = \\ &= 22,11 + j \left(24,9 - \frac{1}{3000 C_1} \right) \end{aligned}$$

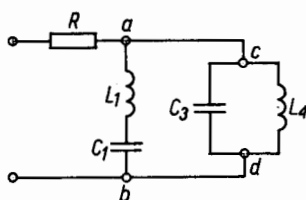
Otrzymujemy zatem

$$24,9 - \frac{1}{3000 C_1} = 0, \quad \text{stad} \quad C_1 = 4,45 \mu\text{F}$$

1.58. Obliczyć wartość reaktancji każdego elementu obwodu (rys. 1.58) dla pierwszej harmonicznej, jeżeli wiadomo, że:

- dla pierwszej harmonicznej cały obwód znajduje się w rezonansie prądów;
- dla drugiej harmonicznej występuje rezonans prądów w gałęziach równoległych L_4, C_3 ;
- dla trzeciej harmonicznej występuje rezonans napięć w szeregowej gałęzi L_1, C_1 .

Znana jest wartość reaktancji indukcyjnej cewki L_1 dla trzeciej harmonicznej $X_{L1(3)} = 54 \Omega$ oraz $R = 20 \Omega$.



Rys. 1.58

ROZWIĄZANIE. Wartość reaktancji indukcyjnej cewki L dla pierwszej harmonicznej

$$X_{L1(1)} = \frac{X_{L1(3)}}{3} = 18 \Omega$$

Rezonans napięć w gałęzi szeregowej L_1, C_1 wystąpi dla trzeciej harmonicznej, gdy

$$X_{L1(3)} = X_{C1(3)} = 54 \Omega$$

zatem

$$X_{C1(3)} = 54 \Omega \quad \text{oraz} \quad X_{C1(1)} = 3 X_{C1(3)} = 162 \Omega$$

Rezonans prądów w gałęziach L_4, C_3 dla drugiej harmonicznej wystąpi, gdy

$$B_{3(2)} = B_{4(2)}, \quad \text{czyli} \quad \frac{X_{C3(1)}}{2} = 2 X_{L4(1)}, \quad \text{ostatecznie} \quad X_{C3(1)} = 4 X_{L4(1)}$$

Impedancja wypadkowa gałęzi $c-d$ dla pierwszej harmonicznej

$$\underline{Z}_{cd} = \frac{-j X_{C3(1)} j X_{L4(1)}}{j(X_{L4(1)} - X_{C3(1)})} = \frac{4 X_{L4(1)}^2}{-j 3 X_{L4(1)}} = j \frac{4 X_{L4(1)}}{3}$$

Impedancja wypadkowa gałęzi L_1 , C_1 dla pierwszej harmonicznej

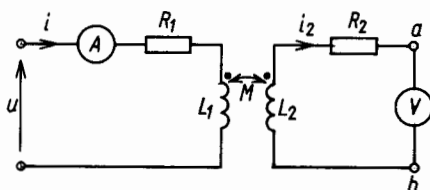
$$\underline{Z}_{1(1)} = j(X_{L1(1)} - X_{C1(1)}) = -j144 \Omega$$

Dla pierwszej harmonicznej cały obwód znajduje się w rezonansie prądów, zatem

$$B_{cd(1)} = B_{1(1)}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{144} = \frac{3}{4X_{L4(1)}}$$

Wartość reaktancji indukcyjnej cewki L_4 dla pierwszej harmonicznej $X_{L4(1)} = 108 \Omega$, a wartość reaktancji pojemnościowej kondensatora C_3 dla pierwszej harmonicznej $X_{C3(1)} = 4X_{L4(1)} = 432 \Omega$.

1.59. Transformator powietrzny dołączono do niesinusoidalnego źródła napięcia $u = [10 + 70\sqrt{2} \sin(1000t + 90^\circ) + 35\sqrt{2} \sin(3000t + 45^\circ)]$ V (rys. 1.59). Dane transformatora powietrznego: $R_1 = R_2 = 5 \Omega$, $L_1 = L_2 = 10$ mH, $M = 8$ mH. Obliczyć wskazania amperomierza i woltomierza.



Rys. 1.59

ROZWIĄZANIE. Włączenie woltomierza ($R_V \rightarrow \infty$) powoduje, że zaciski uzwojenia wtórnego transformatora są nieobciążone i w obwodzie wtórnym prąd nie płynie ($I_2 = 0$). Prąd po stronie pierwotnej transformatora powietrznego

— od składowej stałej

$$I_{(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_1} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

— od pierwszej harmonicznej

$$\underline{I}_{(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{R_1 + j\omega_1 L_1} = \frac{70 e^{j90^\circ}}{5 + j10} = \frac{70 e^{j90^\circ}}{11,18 e^{j63^\circ}} = 6,26 e^{j27^\circ} \text{ A}$$

— od trzeciej harmonicznej

$$\underline{I}_{(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{R_1 + j3\omega_1 L_1} = \frac{35 e^{j45^\circ}}{5 + j30} = \frac{35 e^{j45^\circ}}{30,40 e^{j80^\circ}} = 1,15 e^{-j35^\circ} \text{ A}$$

Wartość chwilowa prądu po stronie pierwotnej

$$i(t) = [2 + 6,26\sqrt{2}\sin(1000t + 27^\circ) + 1,15\sqrt{2}\sin(3000t - 35^\circ)] \text{ A}$$

Wskazanie amperomierza

$$I_A = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2} = \sqrt{2^2 + 6,26^2 + 1,15^2} = 6,67 \text{ A}$$

W uzwojeniu wtórnym indukuje się siła elektromotoryczna indukcji wzajemnej od pierwszej i trzeciej harmonicznej (od składowej stałej jest równa zero)

$$\underline{U}_{ab(1)} = j\omega_1 M \underline{I}_{(1)} = 8e^{j90^\circ} \cdot 6,26e^{j27^\circ} = 50e^{j117^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{ab(3)} = j\omega_3 M \underline{I}_{(3)} = 24e^{j90^\circ} \cdot 1,15e^{-j35^\circ} = 27,6e^{j55^\circ} \text{ V}$$

Wartość chwilowa napięcia po stronie wtórnej

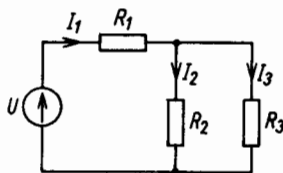
$$u_{ab}(t) = [50\sqrt{2}\sin(1000t + 117^\circ) + 27,6\sqrt{2}\sin(3000t + 55^\circ)] \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza

$$U_V = \sqrt{U_{ab(1)}^2 + U_{ab(3)}^2} = \sqrt{50^2 + 27,6^2} = 57,1 \text{ V}$$

1.7. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1.60. Do źródła napięcia stałego $U = 60 \text{ V}$ dołączono rezystancje: $R_1 = R_2 = R_3 = 20 \Omega$ jak na rys. 1.60. Obliczyć wartości prądów oraz stosunek mocy wydzielających się na poszczególnych rezystancjach.

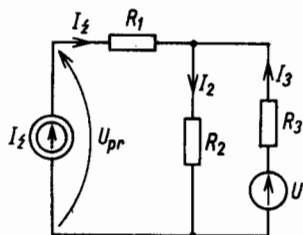


Rys. 1.60

Odpowiedź. $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = I_3 = 1 \text{ A}$

$$\frac{P_{R1}}{P_{R2}} = \frac{P_{R1}}{P_{R3}} = 4; \quad \frac{P_{R2}}{P_{R3}} = 1$$

1.61. Źródło napięcia stałego $U = 100 \text{ V}$ i źródło prądu stałego $I_z = 5 \text{ A}$, są włączone do obwodu rezystancyjnego (rys. 1.61) o parametrach: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$. Obliczyć moce: źródła prądu i źródła napięcia.

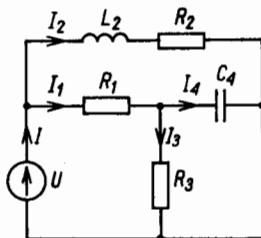


Rys. 1.61

Odpowiedź. Korzystając z zasady superpozycji otrzymujemy:

- moc źródła prądowego $P_1 = U_{pr} I_z = (R_1 I_z + R_2 I_2) I_z = 450 \text{ W}$;
- moc źródła napięciowego $P_2 = U I_3 = 300 \text{ W}$.

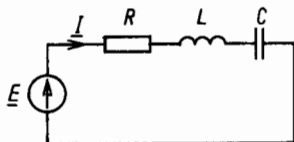
1.62. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.62 obliczyć rozpyły prądów oraz wartość napięć na kondensatorze C_4 i cewce L_2 . Źródło napięcia stałego $U = 120 \text{ V}$ oraz $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$, $L_2 = 0,2 \text{ H}$, $C_4 = 100 \mu\text{F}$.



Rys. 1.62

Odpowiedź. $I_1 = I_3 = 2 \text{ A}$, $I_2 = 4 \text{ A}$, $I_4 = 0$, $I = 6 \text{ A}$, $U_{L2} = 0$, $U_{C4} = 80 \text{ V}$.

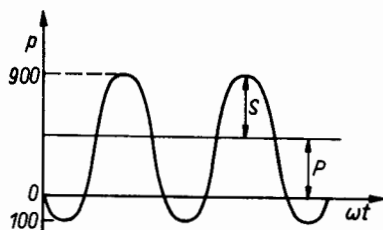
1.63. Do zacisków dwójnika szeregowego RLC (rys. 1.63) przyłożono napięcie o wartości chwilowej $e = 100\sqrt{2} \sin 5000t \text{ V}$. Parametry elementów dwójnika są następujące: $R = 15 \Omega$, $L = 12 \text{ mH}$, $C = 5 \mu\text{F}$. Obliczyć wartość chwilową prądu oraz moc czynną i bierną pobieraną przez dwójnik.



Rys. 1.63

Odpowiedź. $i(t) = 4\sqrt{2} \sin(5000t - 53^\circ) \text{ A}$, $P = 240 \text{ W}$, $Q = 320 \text{ var}$.

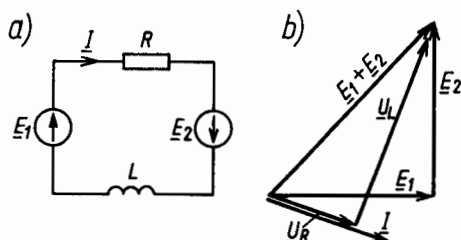
1.64. Na rysunku 1.64 jest przedstawiony przebieg mocy chwilowej dwójnika pasywnego. Określić moc czynną, bierną i pozorną tego dwójnika.



Rys. 1.64

Odpowiedź. $P = 400 \text{ W}$, $S = 500 \text{ V}\cdot\text{A}$, $Q = 300 \text{ var}$.

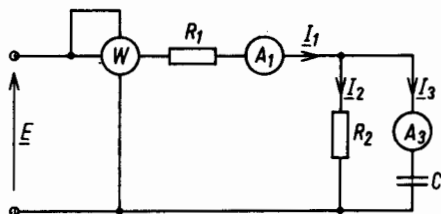
1.65. W obwodzie na rys. 1.65a są dane: $R = 10 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$, $e_1 = 50\sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$, $e_2 = 50\sqrt{2} \sin(1000t + 90^\circ) \text{ V}$. Obliczyć wartość chwilową prądu oraz wykonać wykres wektorowy.



Rys. 1.65

Odpowiedź. $i(t) = 2\sqrt{5} \sin(1000t - 18^\circ) \text{ A}$. Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 1.65b.

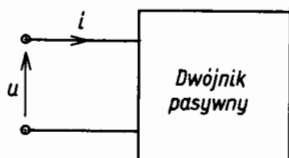
1.66. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.66 wskazania watomierza i amperomierzy wynoszą: $P_W = 290 \text{ W}$, $I_{A1} = 5 \text{ A}$, $I_{A3} = 4 \text{ A}$, a rezystancja $R_1 = 8 \Omega$. Obliczyć wartości rezystancji R_2 , reaktancji X_C oraz wartość skuteczną prądu I_2 .



Rys. 1.66

Odpowiedź. $I_2 = 3 \text{ A}$, $R_2 = 10 \Omega$, $X_C = 7,5 \Omega$.

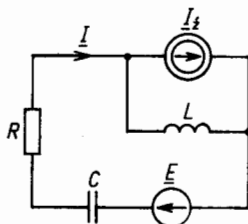
1.67. Dane są wartości chwilowe napięcia i prądu wejściowego dwójnika pasywnego (rys. 1.67): $u = 100\sqrt{2}\sin(314t + 45^\circ)\text{ V}$, $i = 10\sqrt{2}\sin(314t - 15^\circ)\text{ A}$. Obliczyć moc czynną, bierną i pozorną tego dwójnika, impedancję oraz kąt przesunięcia między napięciem i prądem wejściowym.



Rys. 1.67

Odpowiedź. $P = 500\text{ W}$, $Q = 500\sqrt{3}\text{ var}$, $S = 1000\text{ V}\cdot\text{A}$, $\underline{Z} = (5 - j8,65)\Omega$, $\psi = \psi_u - \psi_i = 60^\circ$.

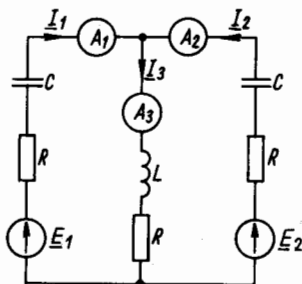
1.68. W obwodzie na rys. 1.68 są dane: $\underline{E} = (100 + j50)\text{ V}$, $\underline{I}_z = 5\text{ A}$, $R = 10\Omega$, $X_L = 10\Omega$, $X_C = 20\Omega$. Obliczyć moc czynną wydzieloną na rezystancji R .



Rys. 1.68

Odpowiedź. $P = 1000\text{ W}$.

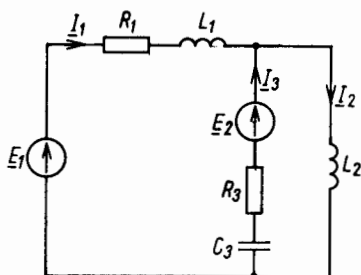
1.69. Obliczyć rozplływ prądów oraz wskazania amperomierzy w obwodzie na rys. 1.69. Dane: $e_1 = 200\sqrt{2}\sin\omega t\text{ V}$, $e_2 = 200\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)\text{ V}$, $R = 20\Omega$, $X_L = 20\Omega$, $X_C = 20\Omega$.



Rys. 1.69

Odpowiedź. $\underline{I}_1 = (1 + j3) \text{ A}$, stąd $I_{A1} = 3,16 \text{ A}$;
 $\underline{I}_2 = (1 - j7) \text{ A}$, stąd $I_{A2} = 7,07 \text{ A}$;
 $\underline{I}_3 = (2 - j4) \text{ A}$, stąd $I_{A3} = 4,47 \text{ A}$.

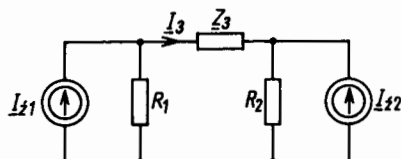
1.70. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.70, stosując twierdzenie Thevenina, obliczyć prąd $\underline{I}_2$. Dane obwodu: $e_1 = 100 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$, $e_2 = 50\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}$, $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = (20 + j20) \Omega$, $\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = (40 - j40) \Omega$, $X_{L2} = 16 \Omega$.



Rys. 1.70

Odpowiedź. $\underline{I}_2 = 1,45 - j0,2 = 1,46 e^{-j8^\circ} \text{ A}$.

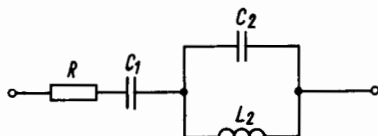
1.71. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.71 obliczyć prąd $\underline{I}_3$. Dane: $\underline{I}_{z1} = 5 \text{ A}$, $\underline{I}_{z2} = j5 \text{ A}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $\underline{Z}_3 = (5 - j10) \Omega$.



Rys. 1.71

Odpowiedź. $\underline{I}_3 = 3,16 e^{-j19^\circ} \text{ A}$.

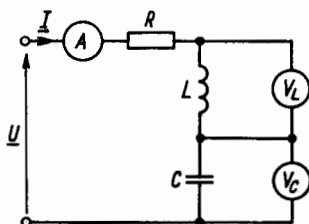
1.72. Obliczyć częstotliwości rezonansowe obwodu przedstawionego na rys. 1.72. Dane: $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 40 \mu\text{F}$, $L_2 = 16 \text{ mH}$, $R = 5 \Omega$.



Rys. 1.72

Odpowiedź. Dla rezonansu napięć $f_1 = 181 \text{ Hz}$, dla rezonansu prądów $f_2 = 203 \text{ Hz}$.

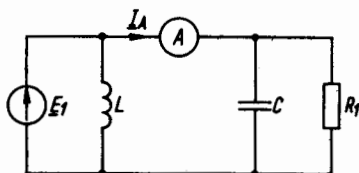
1.73. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.73 przy częstotliwości $f = 0$ napięcie $U_C = 200$ V, natomiast przy $f = f_0 = 500$ Hz prąd w obwodzie $I = 5$ A, a napięcie $U_L = 200$ V. Obliczyć parametry R , L , C tego obwodu oraz napięcie zasilające.



Rys. 1.73

Odpowiedź. $U = 200$ V, $R = 40$ Ω , $L = 12,7$ mH, $C = 8$ μ F.

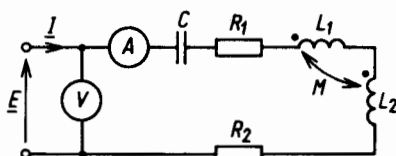
1.74. Obliczyć wskazanie amperomierza w obwodzie przedstawionym na rys. 1.74. Dane: $e_1 = 20 \sin(\omega t - 45^\circ)$ V, $R_1 = 10$ Ω , $X_L = X_C = 5$ Ω .



Rys. 1.74

Odpowiedź. Prąd $\underline{I}_A = (3 + j1)$ A. Wskazanie amperomierza $I_A = \sqrt{10}$ A.

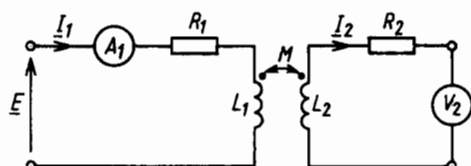
1.75. Obliczyć wartość X_C w obwodzie przedstawionym na rys. 1.75. Parametry elementów obwodu: $R_1 = R_2 = 15$ Ω , $X_{L1} = 16$ Ω , $X_{L2} = 21$ Ω , $X_M = 4$ Ω . Wskazanie amperomierza $I_A = 2$ A, a woltomierza $U_V = 100$ V.



Rys. 1.75

Odpowiedź. Reaktancja pojemnościowa może wynosić: a) $X_C = 5$ Ω , b) $X_C = 85$ Ω .

1.76. Transformator powietrzny włączono do źródła sinusoidalnego o częstotliwości $f = 50 \text{ Hz}$ (rys. 1.76). Wykonano pomiary prądu po stronie pierwotnej $I_1 = 4 \text{ A}$ oraz napięcia przy otwartych zaciskach wtórnych $U_{V2} = 100 \text{ V}$. Obliczyć wartość indukcyjności wzajemnej M .



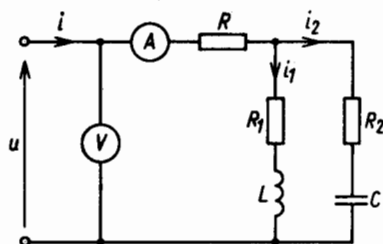
Rys. 1.76

Odpowiedź. $M = 80 \text{ mH}$.

1.77. Niesinusoidalne źródło napięcia

$$u = [60 + 100\sqrt{2} \sin \omega_1 t + 70\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 125^\circ)] \text{ V}$$

dołączono do dwójnika (rys. 1.77) o parametrach: $R = 10 \Omega$, $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $\omega_1 L = 10 \Omega$, $1/\omega_1 C = 60 \Omega$. Obliczyć wskazania woltomierza i amperomierza.



Rys. 1.77

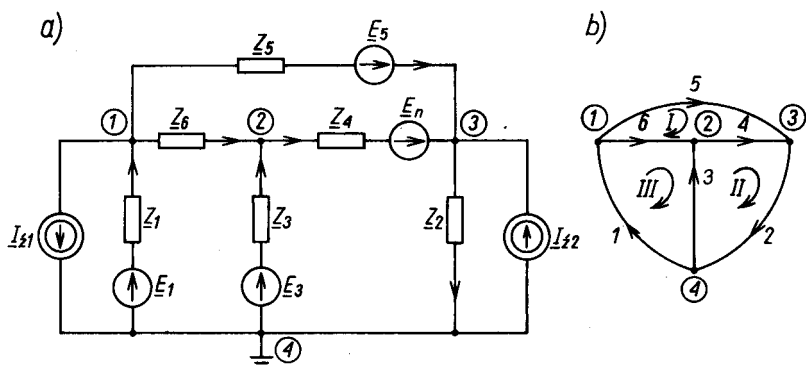
Odpowiedź. $U_V = 136 \text{ V}$, $I_A = 3,8 \text{ A}$.

2

Metody analizy obwodów złożonych

2.1. Topologia obwodów

2.1. Dla obwodu jak na rys. 2.1a narysować graf zorientowany, obliczyć macierz incydencji węzłową **A**, macierz incydencji oczkową **B**, macierze **Z_d**, **Z**, **Y_d**, **Y**.



Rys. 2.1

ROZWIĄZANIE. W celu narysowania grafu zwieramy źródła napięcia i rozwieramy źródła prądu. Numerujemy gałęzie, węzły i oczka; nadajemy każdej gałęzi zwrot oznaczony strzałką. Z grafu przedstawionego na rys. 2.1b wynika, że rozpatrywany obwód ma trzy węzły liniowo niezależne, trzy oczka i sześć gałęzi.

Macierz incydencji węzłowa (węzłem odniesienia jest węzeł 4)

$$A = \begin{array}{c} \text{węzły} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \text{gałęzie} \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Macierz incydencji oczkowa

$$B = \begin{array}{c} \text{oczka} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \text{gałęzie} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Sprawdzamy warunek

$$AB^T = 0$$

gdzie B^T oznacza transpozycję macierzy B .

$$AB^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Formułujemy macierz diagonalną impedancji gałęziowych

$$Z_d = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}$$

Macierz impedancji własnych i wzajemnych

$$Z = BZ_dB^T$$

Mnożymy pierwsze dwie macierze

$$\mathbf{BZ}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_6 \\ 0 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ \underline{Z}_1 & 0 & -\underline{Z}_3 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}$$

Otrzymany wynik mnożymy przez $\mathbf{B}^T$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_6 \\ 0 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ \underline{Z}_1 & 0 & -\underline{Z}_3 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 & -\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_6 \\ -\underline{Z}_4 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 & -\underline{Z}_3 \\ -\underline{Z}_6 & -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix}$$

Formułujemy macierz diagonalną admitancji

$$\mathbf{Y}_d = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_6 \end{bmatrix}$$

Macierz admitancji własnych i wzajemnych

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_d \mathbf{A}^T$$

Mnożymy pierwsze dwie macierze

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_6 \end{bmatrix} =$$

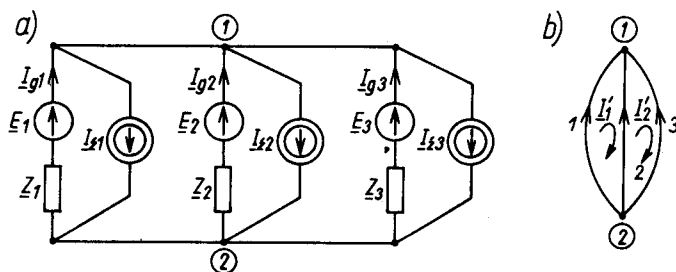
$$= \begin{bmatrix} -\underline{Y}_1 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_5 & \underline{Y}_6 \\ 0 & 0 & -\underline{Y}_3 & \underline{Y}_4 & 0 & -\underline{Y}_6 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & -\underline{Y}_4 & -\underline{Y}_5 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymany wynik mnożymy przez $\mathbf{A}^T$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -\underline{Y}_1 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_5 & \underline{Y}_6 \\ 0 & 0 & -\underline{Y}_3 & \underline{Y}_4 & 0 & -\underline{Y}_6 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & -\underline{Y}_4 & -\underline{Y}_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 & -\underline{Y}_6 & -\underline{Y}_5 \\ -\underline{Y}_6 & \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6 & -\underline{Y}_4 \\ -\underline{Y}_5 & -\underline{Y}_4 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{bmatrix}$$

2.2. Dla obwodu przedstawionego na rys. 2.2a narysować graf zorientowany i opisać obwód za pomocą równań oczkowych.



Rys. 2.2

ROZWIĄZANIE. Obwód z rys. 2.2a składa się z trzech gałęzi uogólnionych. W celu narysowania grafu zwieramy źródła napięcia i rozwieramy źródła prądu. Graf zorientowany jest przedstawiony na rys. 2.2b.

Tworzymy macierz incydencji oczkową. Rozpatrywany obwód ma dwa oczka i trzy gałęzie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierz prądów oczkowych wynosi

$$\mathbf{I}' = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{E}_g - \mathbf{Z}_d \mathbf{I}_z)$$

przy czym

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B} \mathbf{Z}_d \mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{Z}_d = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_g = [\underline{E}_1 \quad \underline{E}_2 \quad \underline{E}_3]^T$$

$$\mathbf{I}_z = [\underline{I}_{z1} \quad \underline{I}_{z2} \quad \underline{I}_{z3}]^T$$

Obliczamy macierz impedancji własnych i wzajemnych

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B} \mathbf{Z}_d \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{B} \mathbf{E}_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \underline{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 & -\underline{E}_2 \\ \underline{E}_2 & -\underline{E}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{Z}_d \mathbf{I}_z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{z1} \\ \underline{I}_{z2} \\ \underline{I}_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 \underline{I}_{z1} & -\underline{Z}_2 \underline{I}_{z2} \\ \underline{Z}_2 \underline{I}_{z2} & -\underline{Z}_3 \underline{I}_{z3} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie macierz prądów oczkowych wynosi

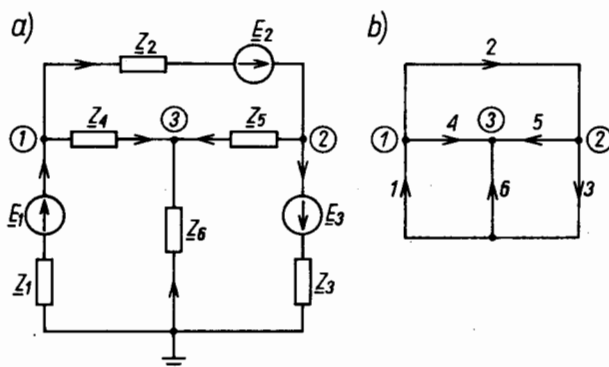
$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{E}_1 - \underline{E}_2 - \underline{Z}_1 \underline{I}_{z1} + \underline{Z}_2 \underline{I}_{z2} \\ \underline{E}_2 - \underline{E}_3 - \underline{Z}_2 \underline{I}_{z2} + \underline{Z}_3 \underline{I}_{z3} \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu macierzy prądów oczkowych, obliczamy macierz prądów gałęziowych

$$\mathbf{I} = \mathbf{B}^T \mathbf{I}'$$

2.3. Dla obwodu jak na rys. 2.3a narysować graf zorientowany i opisać obwód za pomocą równań węzłowych.

ROZWIĄZANIE. Obwód z rys. 2.3a składa się z sześciu gałęzi, ma trzy węzły niezależne i trzy oczka. W celu narysowania grafu zwieramy źródła napięcia (obwód nie zawiera źródeł prądu). Zwroty gałęzi grafu przyjmujemy zgodnie z przyjętymi na rys. 2.3a zwrotami prądów w gałęziach.



Rys. 2.3

Tworzymy macierz incydencji węzłową

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierz napięć węzłowych (potencjałów węzłowych) wynosi

$$U' = Y^{-1} A (I_z - Y_d E_g)$$

przy czym

$$Y^{-1} = [A Y_d A^T]^{-1}$$

$$Y_d = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_6 \end{bmatrix}$$

$$I_z = 0$$

$$E_g = [\underline{E}_1 \quad \underline{E}_2 \quad \underline{E}_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Obliczamy macierz admitancji własnych i wzajemnych

$$Y = A Y_d A^T = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 & -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_4 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 & -\underline{Y}_5 \\ -\underline{Y}_4 & -\underline{Y}_5 & \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 \end{bmatrix}$$

oraz

$$-A Y_d E_g = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \underline{E}_1 - \underline{Y}_2 \underline{E}_2 \\ \underline{Y}_2 \underline{E}_2 - \underline{Y}_3 \underline{E}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie macierz napięć węzłowych

$$\underline{U}' = \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \\ \underline{U}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 & -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_4 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 & -\underline{Y}_5 \\ -\underline{Y}_4 & -\underline{Y}_5 & \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \underline{E}_1 - \underline{Y}_2 \underline{E}_2 \\ \underline{Y}_2 \underline{E}_2 - \underline{Y}_3 \underline{E}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu macierzy napięć węzłowych, tzn. macierzy potencjałów węzłów 1, 2, 3 względem węzła odniesienia, możemy obliczyć macierz napięć gałęziowych.

2.4. Dla pewnego obwodu są dane:

— macierz incydencji węzłowa

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

— macierz diagonalna admitancji

$$\underline{Y}_d = \begin{bmatrix} -j0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

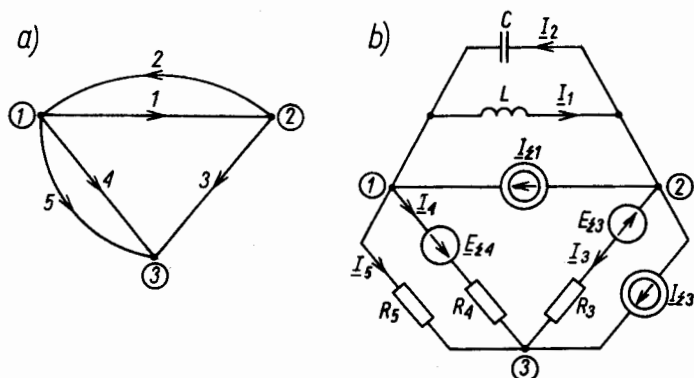
— macierz prądów źródłowych gałęziowych

$$\underline{I}_{zg} = [j10 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 0]^T$$

— macierz napięć źródłowych gałęziowych

$$\underline{E}_{zg} = [0 \quad 0 \quad -5 \quad j10 \quad 0]^T$$

Narysować graf tego obwodu, a następnie przyporządkować elementy poszczególnym gałęziom obwodu.

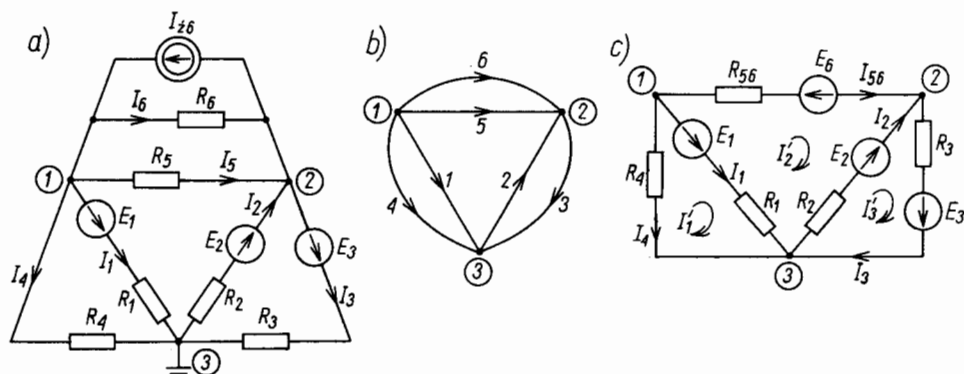


Rys. 2.4

ROZWIĄZANIE. Z konstrukcji macierzy węzłowej wynika, że poszukiwany obwód ma trzy węzły niezależne i pięć gałęzi. Z pierwszym węzłem są związane cztery gałęzie (1, 2, 4, 5), z drugim — trzy (1, 2, 3) i z trzecim węzłem trzy gałęzie (3, 4, 5). Odpowiedni graf jest przedstawiony na rys. 2.4a. Zwroty gałęzi wynikają ze znaków elementów macierzy A . Z konstrukcji macierzy prądów źródłowych widać, że w obwodzie działają dwa źródła prądu związane z gałęzią pierwszą i trzecią oraz dwa napięcia źródłowe związane z gałęzią trzecią i czwartą. Wartości admitancji poszczególnych gałęzi wynikają z konstrukcji macierzy diagonalnej admitancji. Wobec powyższego poszukiwany obwód ma postać jak na rys. 2.4b.

2.2. Metoda oczkowa i węzłowa

2.5. Na rysunku 2.5a jest przedstawiony obwód prądu stałego mający trzy węzły i sześć gałęzi. W obwodzie działają trzy źródła napięcia i jedno źródło prądu. Zadanie rozwiązać metodą oczkową i metodą węzłową. Narysować graf zorientowany obwodu z rys. 2.5a. Dane: $E_1 = 56$ V, $E_2 = 10$ V, $E_3 = 200$ V, $I_{z6} = 1$ A, $R_1 = 8$ Ω , $R_2 = 30$ Ω , $R_3 = 6$ Ω , $R_4 = 40$ Ω , $R_5 = 15$ Ω , $R_6 = 30$ Ω .



Rys. 2.5

ROZWIĄZANIE. Na rysunku 2.5b jest przedstawiony graf obwodu z rys. 2.5a. Jak widać, graf zawiera trzy węzły, przy czym dwa węzły są niezależne. Przyjmijmy węzeł 3 jako węzeł odniesienia. Metodą węzłową wyznaczmy potencjały węzłów 1 i 2.

Konduktancje własne węzłów 1 i 2 wynoszą odpowiednio

$$G_{11} = G_1 + G_4 + G_5 + G_6 = \frac{1}{8} + \frac{1}{40} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = 0,25 \text{ S}$$

$$G_{22} = G_2 + G_3 + G_5 + G_6 = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = 0,3 \text{ S}$$

Konduktancja wzajemna pomiędzy węzłem 1 i 2 wynosi

$$G_{12} = G_{21} = G_5 + G_6 = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = 0,1 \text{ S}$$

Macierz konduktancji własnych i wzajemnych

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Prądy źródłowe wypadkowe w węzłach 1 i 2 wynoszą odpowiednio

$$I'_{z1} = -G_1 E_1 + I_{z6} = -\frac{56}{8} + 1 = -6 \text{ A}$$

$$I'_{z2} = G_2 E_2 - G_3 E_3 - I_{z6} = \frac{10}{30} - \frac{200}{6} - 1 = -34 \text{ A}$$

Macierz prądów źródłowych wypadkowych

$$\mathbf{I}'_z = \begin{bmatrix} I'_{z1} \\ I'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -34 \end{bmatrix}$$

Macierz potencjałów węzłowych (napięć węzłowych)

$$\mathbf{U}' = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I}'_z$$

Zatem

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -6 \\ -34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ -140 \end{bmatrix}$$

Potencjały węzłów 1 i 2 względem węzła odniesienia 3 wynoszą odpowiednio

$$U'_1 = -80 \text{ V} \quad U'_2 = -140 \text{ V}$$

Oznacza to, że potencjały w tych węzłach są niższe od potencjału węzła 3, którego potencjał przyjęto jako równy zeru. Dla przyjętych na rys. 2.5a zwrotów prądów i napięć źródłowych, obliczamy prądy gałęziowe

$$I_1 = G_1(E_1 + U_{13}) = G_1(E_1 + U'_1) = \frac{1}{8}(56 - 80) = -3 \text{ A}$$

$$I_2 = G_2(E_2 + U_{32}) = G_2(E_2 - U'_2) = \frac{1}{30}(10 + 140) = 5 \text{ A}$$

$$I_3 = G_3(E_3 + U_{23}) = G_3(E_2 + U'_2) = \frac{1}{6}(200 - 140) = 10 \text{ A}$$

$$I_4 = G_4 U'_1 = \frac{1}{40}(-80) = -2 \text{ A}$$

$$I_5 = G_5 U_{12} = G_5(U'_1 - U'_2) = \frac{1}{15}(-80 + 140) = 4 \text{ A}$$

Prąd w gałęzi z konduktancją G_6 obliczamy z prawa Kirchhoffa dla węzła 1

$$I_6 = I_{z6} - I_1 - I_4 - I_5 = 1 + 2 + 3 - 4 = 2 \text{ A}$$

W gałęziach, w których prądy mają znak minus, rzeczywiste zwroty prądów są przeciwne do założonych.

W celu rozwiązania zadania metodą oczkową obliczamy konduktancję zastępczą gałęzi 5 i 6 oraz przekształcamy źródło prądu w źródło napięcia

$$G_{56} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = 0,1 \text{ S}; \quad R_{56} = 10 \Omega \quad E_6 = R_{56} I_{z6} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ V}$$

Po przekształceniach otrzymujemy schemat jak na rys. 2.5c. Wybieramy trzy oczka liniowo niezależne i oznaczamy trzy prądy oczkowe I'_1 , I'_2 oraz I'_3 . Obliczamy rezystancje własne oczek

$$R_{11} = R_1 + R_4 = 8 + 40 = 48 \Omega$$

$$R_{22} = R_1 + R_2 + R_{56} = 8 + 30 + 10 = 48 \Omega$$

$$R_{33} = R_3 + R_2 = 6 + 30 = 36 \Omega$$

Obliczamy rezystancje wzajemne oczek

$$R_{12} = R_{21} = -R_1 = -8 \Omega$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_2 = -30 \Omega$$

$$R_{31} = R_{13} = 0$$

Macierz rezystancji własnych i wzajemnych

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & -8 & 0 \\ -8 & 48 & -30 \\ 0 & -30 & 36 \end{bmatrix}$$

Napięcia źródłowe oczkowe wynoszą

$$E_{11} = E_1 = 56 \text{ V}$$

$$E_{22} = -(E_1 + E_2 + E_6) = -76 \text{ V}$$

$$E_{33} = E_2 + E_3 = 210 \text{ V}$$

Macierz napięć źródłowych oczkowych

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ -76 \\ 210 \end{bmatrix}$$

Macierz prądów oczkowych

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}$$

zatem

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} 48 & -8 & 0 \\ -8 & 48 & -30 \\ 0 & -30 & 36 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 56 \\ -76 \\ 210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Prądy oczkowe wynoszą więc

$$I'_1 = 2 \text{ A}; \quad I'_2 = 5 \text{ A}; \quad I'_3 = 10 \text{ A}$$

Biorąc pod uwagę przyjęte zwroty prądów oczkowych i prądów gałęziowych, otrzymamy

$$I_1 = I'_2 - I'_1 = -3 \text{ A}$$

$$I_2 = I'_3 - I'_2 = 5 \text{ A}$$

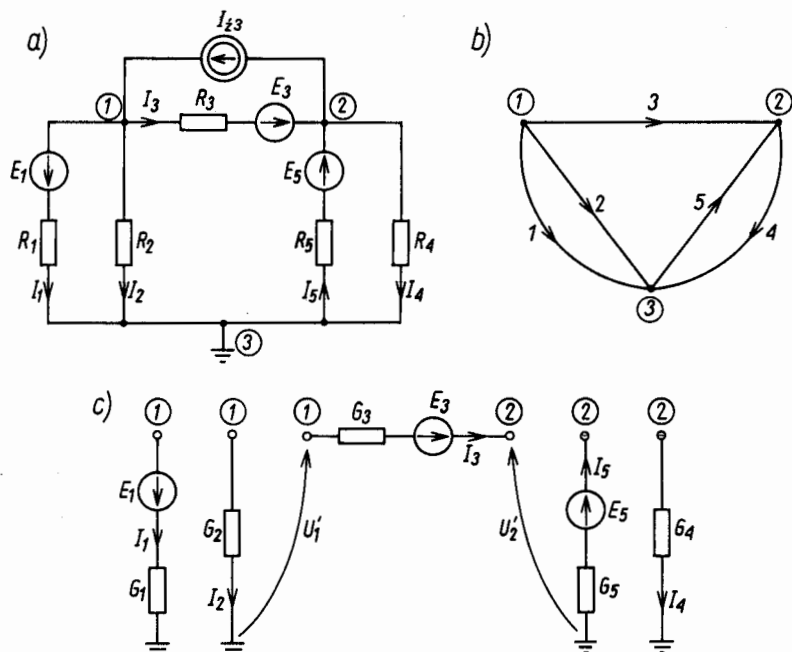
$$I_3 = I'_3 = 10 \text{ A}$$

$$I_4 = -I'_1 = -2 \text{ A}$$

$$I_{56} = I'_2 = 5 \text{ A}$$

2.6. Obwód z rys. 2.6a rozwiązać metodą potencjałów węzłowych.

Dane: $E_1 = 4 \text{ V}$, $E_3 = 2 \text{ V}$, $E_5 = 12 \text{ V}$, $I_{z3} = 2 \text{ A}$, $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = 8 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$.



Rys. 2.6

ROZWIĄZANIE. Rozpatrywany obwód zawiera źródła napięcia i prądu stałego. Węzeł 3 przyjmujemy jako węzeł odniesienia. Na rysunku 2.6b jest przedstawiony graf zorientowany obwodu. Metodą potencjałów węzłowych obliczamy potencjały węzłów 1 i 2. Zamiast rezystancjami posługujemy się konduktancjami.

Macierz potencjałów węzłowych

$$\mathbf{U}' = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I}'_z$$

Elementami tej macierzy są:

— macierz konduktancji własnych i wzajemnych

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,125 & -0,5 \\ -0,5 & 1,625 \end{bmatrix}$$

— macierz prądów źródłowych wypadkowych

$$\mathbf{I}'_z = \begin{bmatrix} I'_{z1} \\ I'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z3} - G_1 E_1 - G_3 E_3 \\ -I_{z3} + G_3 E_3 + G_5 E_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} 1,125 & -0,5 \\ -0,5 & 1,625 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

czyli

$$U'_1 = 4 \text{ V} \text{ — potencjał węzła 1}$$

$$U'_2 = 8 \text{ V} \text{ — potencjał węzła 2}$$

W celu obliczenia prądów w gałęziach zastosujemy metodę rozcięcia obwodu w węzłach 1 i 2 (rys. 2.6c). Z rysunku wynika, że

$$I_1 = G_1(E_1 + U'_1) = \frac{1}{8}(4 + 4) = 1 \text{ A}$$

$$I_2 = G_2 U'_1 = \frac{1}{2} 4 = 2 \text{ A}$$

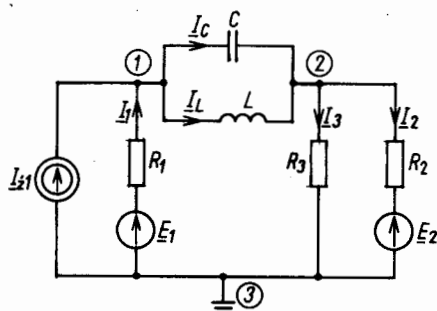
$$I_3 = G_3(E_3 + U_{12}) = \frac{1}{2}(2 + 4 - 8) = -1 \text{ A}$$

$$I_4 = G_4 U'_2 = \frac{1}{8} 8 = 1 \text{ A}$$

$$I_5 = G_5(E_5 - U'_2) = 1(12 - 8) = 4 \text{ A}$$

Jak z powyższego wynika, prąd w gałęzi 3 ma zwrot przeciwny do założonego na rysunku.

2.7. W obwodzie przedstawionym na rys. 2.7 obliczyć rozptyw prądów metodą potencjałów węzłowych (metodą węzłową). Dane: $L = 4 \text{ H}$, $C = 0,25 \text{ F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$, $\underline{I}_{z1} = 2e^{j0} \text{ A}$, $\underline{E}_1 = 1e^{j0} \text{ V}$, $\underline{E}_2 = j2 \text{ V}$, $\omega = 1 \text{ rad/s}$.



Rys. 2.7

ROZWIĄZANIE. Obliczamy reaktancję cewki i kondensatora

$$X_L = \omega L = 4 \Omega, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 4 \Omega$$

Admitancje własne węzłów 1 i 2 wynoszą

$$\underline{Y}_{11} = G_1 + j(B_C - B_L) = 1 \text{ S,} \quad \text{gdyż} \quad B_L = B_C = 0,25 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_{22} = G_2 + G_3 + j(B_C - B_L) = 2 \text{ S}$$

Admitancja wzajemna między węzłami 1 i 2 jest równa zero, $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = 0$.
Prądy źródłowe wypadkowe węzłów 1 i 2 wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}'_{z1} = \underline{I}_{z1} + G_1 \underline{E}_1 = 2 + 1 = 3 \text{ A}$$

$$\underline{I}'_{z2} = G_2 \underline{E}_2 = j2 \text{ A}$$

Macierz admitancji własnych i wzajemnych wynosi

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz prądów źródłowych wypadkowych

$$\mathbf{I}_z = \begin{bmatrix} \underline{I}'_{z1} \\ \underline{I}'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ j2 \end{bmatrix}$$

Macierz napięć węzłowych (potencjałów węzłowych)

$$\mathbf{U}' = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I}_z$$

Zatem

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ j1 \end{bmatrix}$$

Potencjały węzłów 1 i 2 względem węzła odniesienia 3 wynoszą odpowiednio

$$\underline{U}'_1 = 3 \text{ V;} \quad \underline{U}'_2 = j1 \text{ V}$$

Napięcie na gałęzi zawierającej równolegle połączoną cewkę i kondensator wynosi

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}'_1 - \underline{U}'_2 = (3 - j1) \text{ V}$$

Prąd płynący w gałęzi cewki

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{12}}{jX_L} = \frac{3 - j1}{j4} = (-0,25 - j0,75) \text{ A}$$

Prąd płynący w gałęzi kondensatora

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{12}}{-jX_C} = \frac{3 - j1}{-j4} = (0,25 + j0,75) \text{ A}$$

Suma tych prądów jest równa zeru.

Prądy w pozostałych gałęziach wynoszą

$$\underline{I}_1 = G_1(\underline{E}_1 + \underline{U}_{31}) = 1(1 - 3) = -2 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = G_2(-\underline{E}_2 + \underline{U}_{23}) = 1(-j2 + j1) = -j1 \text{ A}$$

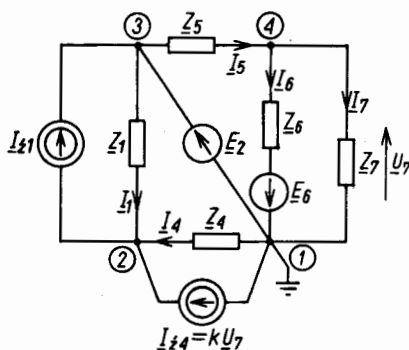
$$\underline{I}_3 = G_3 \underline{U}_{23} = 1(j1) = j1 \text{ A}$$

Ponieważ prąd w gałęzi 1-2 jest równy zeru, wobec tego

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_{z1} = -2 + 2 = 0 \quad \text{oraz} \quad \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -j1 + j1 = 0$$

2.8. Obwód jak na rys. 2.8 rozwiązać metodą potencjałów węzłowych.

Dane: $\underline{Z}_1 = 1 \Omega$, $\underline{Z}_4 = j1 \Omega$, $\underline{Z}_5 = -j1 \Omega$, $\underline{Z}_6 = (1 + j1) \Omega$, $\underline{Z}_7 = (1 - j1) \Omega$, $\underline{E}_2 = 10 \text{ V}$, $\underline{E}_6 = j10 \text{ V}$, $\underline{I}_{z1} = j1 \text{ A}$, $\underline{I}_{z4} = k \underline{U}_7$, przy czym $k = 0,5$.



Rys. 2.8.

ROZWIĄZANIE. Przyjmujemy potencjał węzła 1 równy zeru, tzn. węzeł 1 jest węzłem odniesienia. Ponieważ gałąź 2 zawiera idealne źródło napięcia $\underline{E}_2$, wobec tego potencjał węzła 3 wynosi $\underline{V}_3 = \underline{E}_2 = 10 \text{ V}$. Należy więc wyznaczyć

potencjały węzłów 2 i 4. Ponadto z rysunku wynika, że napięcie $\underline{U}_7$ jest równe potencjałowi węzła 4. Zgodnie z metodą napięć węzłowych

$$\begin{aligned}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_4) \underline{V}_2 - \underline{Y}_1 \underline{V}_3 &= -\underline{I}_{z1} + \underline{I}_{z4} \\ -\underline{Y}_5 \underline{V}_3 + (\underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 + \underline{Y}_7) \underline{V}_4 &= -\underline{Y}_6 \underline{E}_6\end{aligned}$$

Dla danych impedancji obliczamy admitancje; podstawiamy $\underline{V}_3 = 10 \text{ V}$, $\underline{I}_{z4} = k \underline{U}_7 = k \underline{V}_4 = 0,5 \underline{V}_4$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned}(1 - j1) \underline{V}_2 - 10 &= -j1 + 0,5 \underline{V}_4 \\ -j1 \cdot 10 + (1 + j1) \underline{V}_4 &= -(0,5 - j0,5) \cdot j10\end{aligned}$$

W wyniku rozwiązania tego układu równań otrzymujemy

$$\begin{aligned}\underline{V}_2 &= (4,25 + j5,75) \text{ V} \\ \underline{V}_4 &= j5 \text{ V}\end{aligned}$$

Mając obliczone potencjały węzłów, możemy obliczyć prądy w gałęziach.

2.9. Metodą oczkową obliczyć prądy gałęziowe w obwodzie jak na rys. 2.9a. Dane: $\underline{Z}_1 = -j10 \Omega$, $\underline{Z}_2 = j10 \Omega$, $\underline{Z}_3 = 5 \Omega$, $\underline{Z}_4 = \underline{Z}_5 = 10 \Omega$, $\underline{E}_2 = j100 \text{ V}$, $\underline{I}_z = 5 \text{ A}$.

ROZWIĄZANIE. W obwodzie występuje idealne źródło prądu. Do jego wyeliminowania zastosujemy twierdzenie o włączeniu dodatkowych idealnych źródeł prądu. W tym celu równolegle do każdej gałęzi tworzącej oczko zewnętrzne (rys. 2.9b) włączamy idealne źródło prądu o wartości $\underline{I}_z = 5 \text{ A}$ i o przeciwnym zwrocie względem źródła idealnego, które zamierzamy wyeliminować. Otrzymujemy obwód jak na rys. 2.9c. Następnie źródła prądu (rzeczywiste) zastępujemy źródłami napięcia: $\underline{E}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_z = -j50 \text{ V}$ oraz $\underline{E}_5 = \underline{Z}_5 \underline{I}_z = 10 \cdot 5 = 50 \text{ V}$. Otrzymujemy obwód jak na rys. 2.9d. Graf tego obwodu przedstawiono na rys. 2.9e. Taki sam graf zorientowany odpowiada obwodowi z rys. 2.9a. Zatem obwody z rys. 2.9a i 2.9d są strukturalnie równoważne. Obwód z rys. 2.9d jest obwodem o dwóch oczkach niezależnych i do jego rozwiązania zastosujemy metodę prądów oczkowych. Macierz prądów oczkowych wynosi

$$\mathbf{I}' = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}$$

Obliczamy:

— macierz impedancji własnych i wzajemnych

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$$

— macierz napięć źródłowych oczkowych

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{11} \\ \underline{E}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \\ -\underline{E}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j50 + j100 \\ -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j50 \\ -50 \end{bmatrix}$$

— macierz odwrotną macierzy impedancji własnych i wzajemnych

$$\underline{Z}^{-1} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

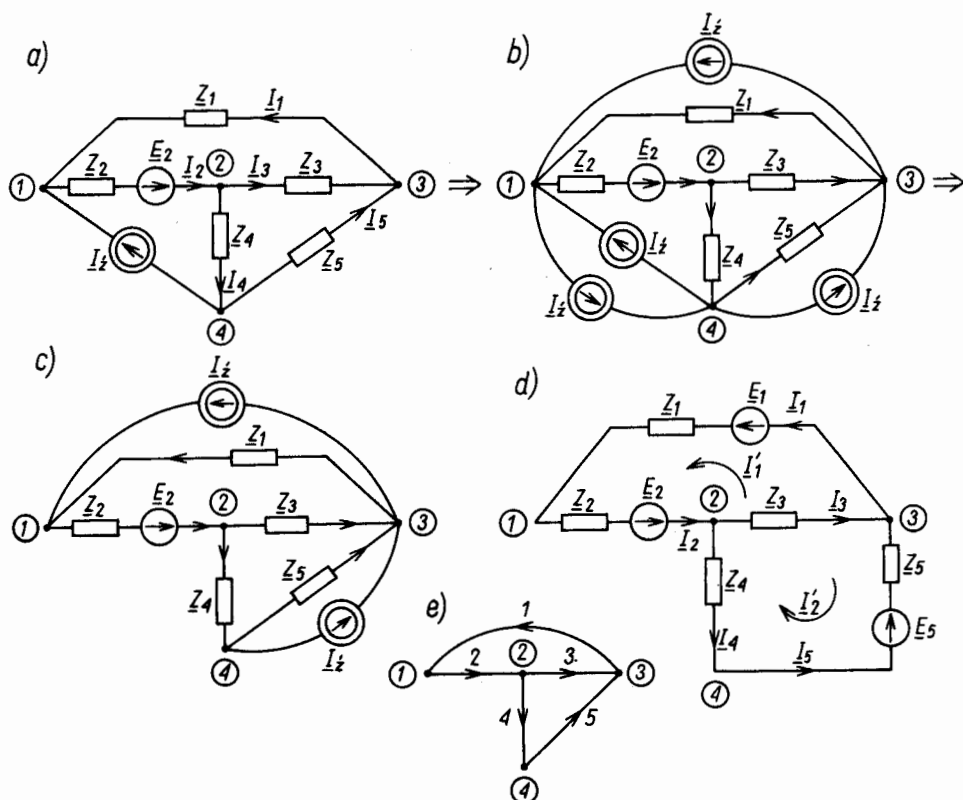
$$\underline{I}' = \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j50 \\ -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 + j7,5 \\ -2,5 - j2,5 \end{bmatrix}$$

Prądy oczkowe wynoszą

$$\underline{I}'_1 = (2,5 + j7,5) \text{ A} \quad \text{oraz} \quad \underline{I}'_2 = (-2,5 - j2,5) \text{ A}$$

Prądy gałęziowe

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}'_1 &= (2,5 + j7,5) \text{ A} \\ \underline{I}_4 = \underline{I}_5 = -\underline{I}'_2 &= (-2,5 - j2,5) \text{ A} \end{aligned}$$



Rys. 2.9

Zadanie można rozwiązać również metodą wyznaczników. W tym celu napiszemy układ równań oczkowych w postaci

$$\underline{E}_{11} = \underline{Z}_{11} \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}'_2$$

$$\underline{E}_{22} = \underline{Z}_{21} \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}'_2$$

przy czym

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 5 \Omega$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 = 25 \Omega$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 = 5 \Omega$$

$$\underline{E}_{11} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = j50 \text{ V}$$

$$\underline{E}_{22} = -\underline{E}_5 = -50 \text{ V}$$

Wyznacznik główny układu wynosi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = 100$$

Odpowiednio wyznaczniki

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} j50 & 5 \\ -50 & 25 \end{vmatrix} = 250 + j750$$

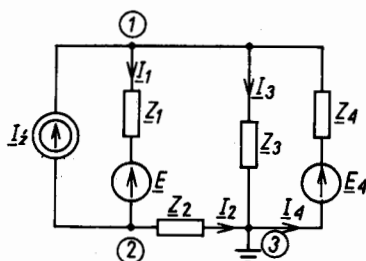
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & j50 \\ 5 & -50 \end{vmatrix} = -250 - j250$$

Szukane prądy oczkowe

$$\underline{I}'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{250 + j750}{100} = (2,5 + j7,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-250 - j250}{100} = (-2,5 - j2,5) \text{ A}$$

2.10. Obwód przedstawiony na rys. 2.10 zawiera dwa źródła sterowane: źródło prądu sterowane prądem $\underline{I}_z = k \underline{I}_1$ oraz źródło napięcia sterowane prądem $\underline{E} = \alpha \underline{I}_z$. Metodą potencjałów węzłowych obliczyć prądy w gałęziach oraz prąd źródłowy $\underline{I}_z$ i napięcie źródłowe $\underline{E}$. Dane: $\underline{Z}_1 = 2 \Omega$, $\underline{Z}_2 = 1 \Omega$, $\underline{Z}_3 = j1 \Omega$, $\underline{Z}_4 = -j1 \Omega$, $\underline{E}_4 = 6 \text{ V}$, $\alpha = 1 \text{ V/A}$, $k = 4 \text{ A/A}$.



Rys. 2.10

ROZWIĄZANIE. W obwodzie występują dwa węzły niezależne 1 i 2 (trzeci węzeł jest uziemiony — jego potencjał jest równy zero).

Układamy dwa równania

$$\left. \begin{aligned} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) \underline{U}'_1 - \underline{Y}_1 \underline{U}'_2 &= \underline{I}_z + \underline{Y}_1 \underline{E} + \underline{Y}_4 \underline{E}_4 \\ -\underline{Y}_1 \underline{U}'_1 + (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U}'_2 &= -\underline{I}_z - \underline{Y}_1 \underline{E} \end{aligned} \right\}$$

Z założenia

$$\underline{I}_z = k \underline{I}_1 \quad \text{oraz} \quad \underline{E} = \alpha \underline{I}_z = \alpha k \underline{I}_1$$

Uzależnimy prąd $\underline{I}_1$ od potencjałów w węzłach 1 i 2

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}'_2 + \underline{E} - \underline{Z}_1 \underline{I}_1$$

Stąd po przekształceniach

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}'_2 - \underline{U}'_1}{\underline{Z}_1 - \alpha k} = 0,5 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2)$$

Wobec tego

$$\underline{I}_z = k \underline{I}_1 = 2 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2)$$

$$\underline{E} = \alpha \underline{I}_z = 2 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2)$$

Podstawiamy dane do pierwszego układu równań na potencjały węzłowe

$$\left. \begin{aligned} 0,5 \underline{U}'_1 - 0,5 \underline{U}'_2 &= 2 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2) + 0,5 \cdot 2 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2) + j6 \\ -0,5 \underline{U}'_1 + 1,5 \underline{U}'_2 &= -2 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2) - 0,5 \cdot 2 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2) \end{aligned} \right\}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$-2,5 \underline{U}'_1 + 2,5 \underline{U}'_2 = j6$$

$$2,5 \underline{U}'_1 - 1,5 \underline{U}'_2 = 0$$

stąd

$$\underline{U}'_1 = j3,6 \text{ V} \quad \text{oraz} \quad \underline{U}'_2 = j6 \text{ V}$$

Prąd $\underline{I}_z = 2 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2) = -j4,8 \text{ A}$

Napięcie $\underline{E} = 2 (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2) = -j4,8 \text{ V}$

Prądy w gałęziach

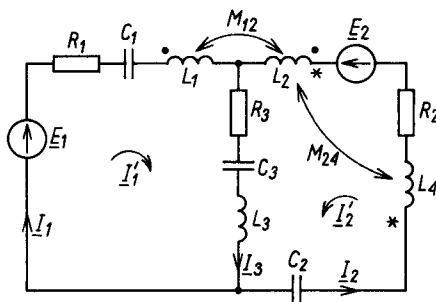
$$\underline{I}_1 = \frac{1}{k} \underline{I}_z = \frac{1}{4} (-j4,8) = -j1,2 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} \underline{U}'_2 = j6 \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} \underline{U}'_1 = (-j1)(j3,6) = 3,6 \text{ A}$$

$$\underline{I}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_4} (\underline{E}_4 - \underline{U}'_1) = j1(6 - j3,6) = (3,6 + j6) \text{ A}$$

2.11. Znaleźć rozptył prądów w obwodzie jak na rys. 2.11. Do obliczeń zastosować metodę oczkową. Dane: $\underline{E}_1 = j200 \text{ V}$, $\underline{E}_2 = 100 e^{j0^\circ} \text{ V}$, $R_1 = R_3 = 10 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $X_{C1} = 20 \Omega$, $X_{L1} = 10 \Omega$, $X_{C3} = 10 \Omega$, $X_{L3} = 20 \Omega$, $X_{L2} = X_{L4} = 10 \Omega$, $X_{C2} = 40 \Omega$, $X_{M12} = X_{M24} = 5 \Omega$.



Rys. 2.11

ROZWIĄZANIE. Zgodnie z metodą oczkową

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_{11} \\ \underline{E}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix}$$

Impedancje własne oczek i impedancję wzajemną — ze względu na występowanie sprzężeń indukcyjnych — obliczamy nieco inaczej niż w obwodzie bez sprzężeń. W oczku 2 istnieje sprzężenie pomiędzy elementami L_2 i L_4 należącymi do tego samego oczka. Wobec tego impedancja indukcji wzajemnej $\underline{Z}_{M24} = jX_{M24}$ występuje dwukrotnie. Natomiast impedancja indukcji wzajemnej pomiędzy elementami L_1 i L_2 wchodzi do wyrażenia na impedancję wzajemną oczek. Zatem

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + R_3 + jX_{L1} + jX_{L3} - jX_{C1} - jX_{C3} = 20 \Omega$$

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + R_3 + jX_{L3} + jX_{L4} + jX_{L2} - jX_{C2} - jX_{C3} + 2jX_{M24} = 40 \Omega$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = R_3 + jX_{L3} - jX_{C3} + jX_{M12} = (10 + j15) \Omega$$

Obliczamy napięcia źródłowe oczkowe

$$\underline{E}_{11} = \underline{E}_1 = j200 \text{ V}$$

$$\underline{E}_{22} = \underline{E}_2 = 100 \text{ V}$$

Równania macierzowe podane na wstępie można napisać w postaci układu dwóch równań

$$\underline{E}_{11} = \underline{Z}_{11} \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}'_2$$

$$\underline{E}_{22} = \underline{Z}_{21} \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}'_2$$

W celu obliczenia prądów oczkowych zastosujemy metodę wyznaczników.

Wyznacznik główny układu równań

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 10 + j15 \\ 10 + j15 & 40 \end{vmatrix} = 925 - j300$$

wyznaczniki

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} j200 & 10 + j15 \\ 100 & 40 \end{vmatrix} = -1000 + j6500$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & j200 \\ 10 + j15 & 100 \end{vmatrix} = 5000 - j2000$$

Szukane prądy oczkowe

$$\underline{I}'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1000 + j6500}{925 - j300} = (-3 + j6) \text{ A}$$

$$\underline{I}'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5000 - j2000}{925 - j300} = (5,5 - j0,37) \text{ A}$$

Prądy gałęziowe

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = (-3 + j6) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = (5,5 - j0,37) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 = (2,5 + j5,63) \text{ A}$$

2.12. Dany jest obwód jak na rys. 2.12a. Należy dokonać eliminacji idealnego źródła napięcia $\underline{E}$ i przekształcić obwód do postaci najbardziej dogodnej do rozwiązywania metodą potencjałów węzłowych.

ROZWIĄZANIE. W wyniku zastosowania twierdzenia o włączaniu idealnych źródeł napięcia do gałęzi zbiegających się w węźle 4 otrzymamy schemat jak na rys. 2.12b. Obwód z rys. 2.12b można przekształcić do postaci jak na rys. 2.12c, korzystając z zależności, że $\underline{E}_3 = \underline{E}_1 + \underline{E}$; $\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$. W wyniku zarówno przekształcenia źródeł napięcia na źródła prądu, jak i następnie obliczenia zastępczych źródeł prądu oraz zastępczych admitancji, otrzymamy schemat jak na rys. 2.12d. Jeśli przyjmiemy węzeł 3 jako węzeł odniesienia, to zgodnie z metodą potencjałów węzłowych, potencjały węzłów 1 i 2 obliczymy z równań

$$\underline{Y}_{11} \underline{U}'_1 - \underline{Y}_{12} \underline{U}'_2 = \underline{I}_{z1} - \underline{I}_{z2}$$

$$- \underline{Y}_{21} \underline{U}'_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}'_2 = - \underline{I}_{z1} - \underline{I}_{z3}$$

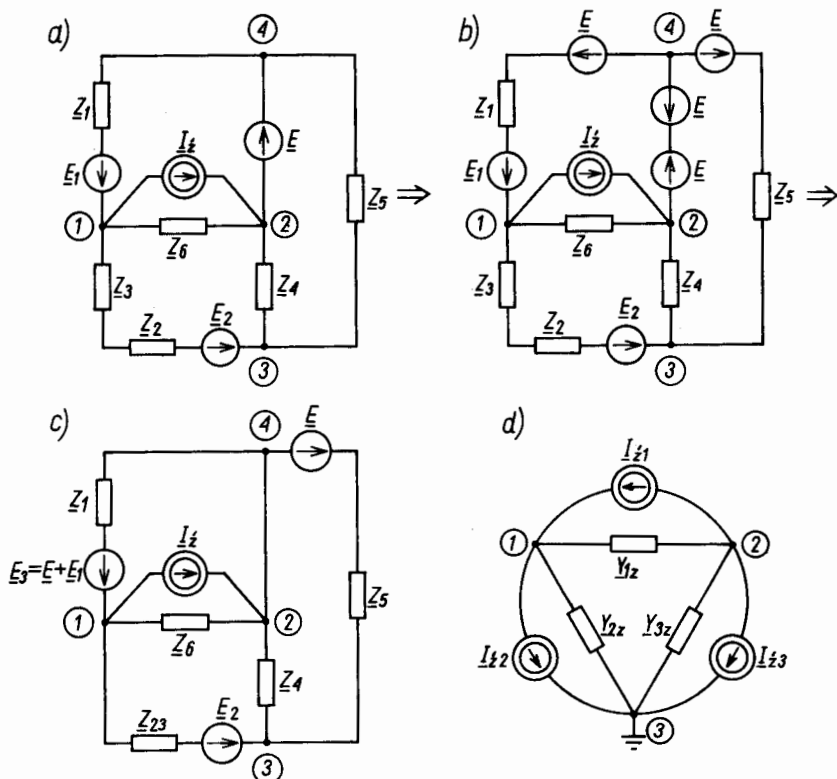
przy czym

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{1z} + \underline{Y}_{2z} \quad \underline{Y}_{1z} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_6}$$

$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{1z} + \underline{Y}_{3z} \quad \underline{Y}_{2z} = \frac{1}{\underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{1z} \quad \underline{Y}_{3z} = \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_5}$$

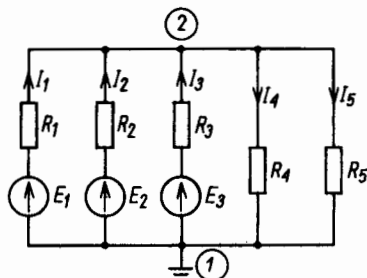
$$\underline{I}_{z1} = -\underline{I}_z + \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{I}_{z2} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_{23}}; \quad \underline{I}_{z3} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_5} \Rightarrow$$



Rys. 2.12

2.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

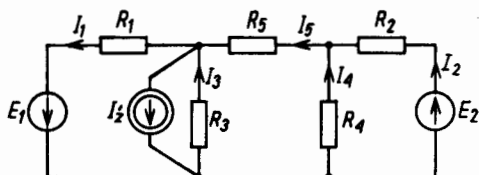
2.13. Stosując metodę potencjałów węzłowych, obliczyć wartości prądów w obwodzie przedstawionym na rys. 2.13. Dane: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $E_3 = 30 \text{ V}$, $R_1 = R_5 = 5 \Omega$, $R_2 = R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$.



Rys. 2.13

Odpowiedź. $V_2 = 7,5 \text{ V}$, $I_1 = 0,5 \text{ A}$, $I_2 = 0,625 \text{ A}$, $I_3 = 1,125 \text{ A}$, $I_4 = 0,75 \text{ A}$, $I_5 = 1,5 \text{ A}$.

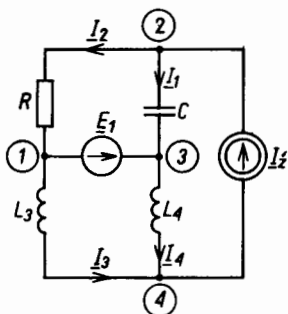
2.14. W obwodzie przedstawionym na rys. 2.14 obliczyć wartości prądów, stosując metodę potencjałów węzłowych. Dane: $E_1 = 8 \text{ V}$, $E_2 = 2 \text{ V}$, $I_z = 0,5 \text{ A}$, $R_1 = R_4 = 20 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$.



Rys. 2.14

Odpowiedź. $I_1 = 0,1 \text{ A}$, $I_2 = 0,1 \text{ A}$, $I_3 = 0,2 \text{ A}$, $I_4 = 0,3 \text{ A}$, $I_5 = 0,4 \text{ A}$.

2.15. Parametry elementów obwodu przedstawionego na rys. 2.15 wynoszą: $E_1 = 10 \text{ V}$, $I_z = 1 \text{ A}$, $R = 5 \Omega$, $X_{L3} = X_C = 5 \Omega$, $X_{L4} = 10 \Omega$. Obliczyć prądy gałęziowe, stosując metodę prądów oczkowych oraz metodę potencjałów węzłowych.



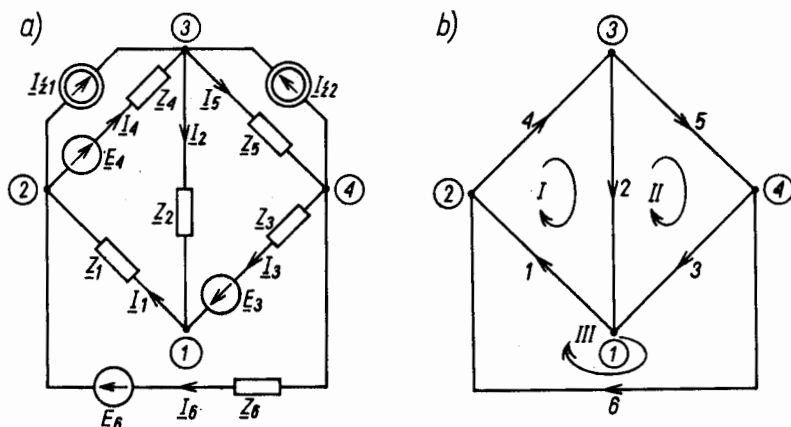
Rys. 2.15

Odpowiedź. $i_1 = \sin(\omega t - 135^\circ) \text{ A}$, $i_2 = 2,26 \sin(\omega t + 18^\circ) \text{ A}$,
 $i_3 = 1,34 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$, $i_4 = 1,06 \sin(\omega t - 63^\circ) \text{ A}$.

Po uziemieniu węzła 1 potencjały pozostałych węzłów wynoszą:

$$\underline{V}_2 = 7,9 e^{j180^\circ} \text{ V}, \quad \underline{V}_3 = 10 \text{ V}, \quad \underline{V}_4 = 4,7 e^{-j45^\circ} \text{ V}.$$

2.16. Dla obwodu przedstawionego na rys. 2.16a narysować graf zorientowany, a następnie utworzyć macierze incydencji: węzłową $\mathbf{A}$ i oczkową $\mathbf{B}$ oraz obliczyć iloczyn $\mathbf{A}\mathbf{B}^T$. Dane: $\underline{E}_3 = \underline{E}_4 = j100 \text{ V}$, $\underline{E}_6 = 100 \text{ V}$, $\underline{I}_{z1} = 1 \text{ A}$, $\underline{I}_{z2} = 2 \text{ A}$, $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 10 \Omega$, $\underline{Z}_4 = j10 \Omega$, $\underline{Z}_5 = \underline{Z}_6 = (10 - j10) \Omega$.



Rys. 2.16

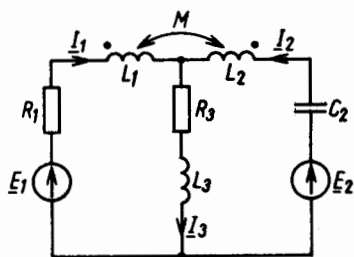
Odpowiedź. Graf zorientowany obwodu z rys. 2.16a jest przedstawiony na rys. 2.16b. Przyjmując, że węzłem odniesienia jest węzeł 1, otrzymujemy macierz węzłową $\mathbf{A}$

		1	2	3	4	5	6	gałęzie
węzły								
2	$\mathbf{A} =$	-1	0	0	1	0	-1	$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$
3		0	1	0	-1	1	0	
4		0	0	1	0	-1	1	

Macierz oczkowa $\mathbf{B}$

		1	2	3	4	5	6	gałęzie
oczka								
I	$\mathbf{B} =$	1	1	0	1	0	0	$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$
II		0	-1	1	0	1	0	
III		-1	0	-1	0	0	1	

2.17. Obliczyć wartość prądów w obwodzie przedstawionym na rys. 2.17 metodą prądów oczkowych. Dane: $e_1 = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ V, $e_2 = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $X_{L1} = 20\ \Omega$, $X_{L2} = 60\ \Omega$, $X_{L3} = 40\ \Omega$, $X_M = 20\ \Omega$, $X_{C2} = 30\ \Omega$.



Rys. 2.17

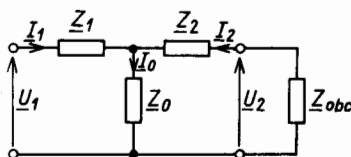
Odpowiedź. $\underline{I}_1 = 5,8 e^{-j66^\circ}$ A, $\underline{I}_2 = 5,3 e^{j96^\circ}$ A, $\underline{I}_3 = 1,77$ A.

3

Czwórniki

3.1. Czwórniki pasywne

3.1. Dany jest czwórnik o strukturze jak na rys. 3.1 (czwórnik typu T) i parametrach równych odpowiednio: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 10 \Omega$, $\underline{Z}_0 = j5 \Omega$. Wyznaczyć jego parametry łańcuchowe oraz tak dobrać impedancję obciążającą $\underline{Z}_{obc}$, aby była równa impedancji wejściowej.



Rys. 3.1

ROZWIĄZANIE. Z pierwszego prawa Kirchhoffa wynika, że

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

Prąd w gałęzi poprzecznej czwórnika

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2}{\underline{Z}_0} = \frac{1}{\underline{Z}_0} \underline{U}_2 - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0} \underline{I}_2$$

Podstawiając prąd $\underline{I}_0$ do pierwszego równania, otrzymamy

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_0} \underline{U}_2 - \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) \underline{I}_2$$

Stąd parametry łańcuchowe $\underline{C}$ i $\underline{D}$ są odpowiednio równe

$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_0}; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}$$

Napięcie na wejściu czwórnika

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2$$

Po podstawieniu uprzednio określonego wyrażenia na prąd $\underline{I}_1$ wyznaczmy napięcie

$$\underline{U}_1 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}\right) \underline{U}_2 - \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) \underline{I}_2$$

oraz parametry łańcuchowe

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}$$

Podstawiając dane, obliczamy

$$\underline{A} = 1 - j2; \quad \underline{B} = 20 - j20; \quad \underline{C} = -j0,2; \quad \underline{D} = 1 - j2$$

Dobierając obciążenie czwórnika tak, by

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{obc} = \underline{Z}_c$$

gdzie $\underline{Z}_c$ — impedancja falowa (charakterystyczna) czwórnika, stwierdzamy, że musi być spełniona równość

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A} \underline{Z}_c + \underline{B}}{\underline{C} \underline{Z}_c + \underline{D}}$$

z której wynika równanie

$$\underline{C} \underline{Z}_c^2 + (\underline{D} - \underline{A}) \underline{Z}_c - \underline{B} = 0$$

Równanie to w przypadku ogólnym ma dwa rozwiązania

$$\underline{Z}_{c1} = -\frac{\underline{D} - \underline{A}}{2\underline{C}} + \sqrt{\frac{(\underline{D} - \underline{A})^2}{4\underline{C}^2} + \frac{\underline{B}}{\underline{C}}}$$

$$\underline{Z}_{c1} = -\frac{\underline{D} - \underline{A}}{2\underline{C}} - \sqrt{\frac{(\underline{D} - \underline{A})^2}{4\underline{C}^2} + \frac{\underline{B}}{\underline{C}}}$$

Abstrahując od realności fizycznej spełnienia któregoś z powyższych rozwiązań, istnieją dwie impedancje falowe, z których każda dołączona do zacisków wyjściowych czwórnika powoduje, że impedancja wejściowa jest jej równa. Tylko w przypadku czwórnika symetrycznego, gdy $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ oraz $\underline{A} = \underline{D}$, występuje jedna impedancja falowa określona zależnością

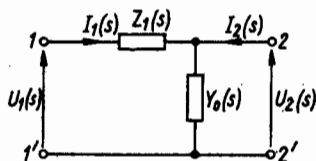
$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}$$

Rozpatrywany czwórnik jest czwornikiem symetrycznym. Po podstawieniu wartości parametrów $\underline{B}$ i $\underline{C}$ do ostatniej zależności otrzymujemy

$$\underline{Z}_{obc} = \underline{Z}_c = \sqrt{141,42 e^{j45^\circ}} \Omega = 11,9 e^{j22^\circ 30'} \Omega$$

3.2. Wyznaczyć parametry łańcuchowe czwornika przedstawionego na rys. 3.2. Dobrać rodzaj i wartości jego parametrów w taki sposób, by transmitancję napięciową przy $I_2(s) = 0$ wyrazić zależnością

$$T(s) = \frac{10}{s + 10}$$



Rys. 3.2

ROZWIĄZANIE. Zakładając, że impedancje elementów czwornika są wyrażone w postaci operatorowej możemy, korzystając z praw Kirchhoffa, ułożyć następujące równania:

$$U_1(s) = U_2(s) + Z_1(s) I_1(s)$$

$$Y_0(s) U_2(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

Stąd po uporządkowaniu otrzymujemy opis w postaci łańcuchowej

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1(s) Y_0(s) & Z_1(s) \\ Y_0(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}$$

oraz parametry

$$A = 1 + Z_1(s) Y_0(s); \quad B = Z_1(s); \quad C = Y_0(s); \quad D = 1$$

Transmitancja napięciowa układu

$$T(s) = \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = \frac{1}{A} = \frac{1}{1 + Z_1(s) Y_0(s)}$$

Realizacja założonej transmitancji, w klasie układów pasywnych jest możliwa przez różny dobór elementów czwornika. Najprostsze wydają się dwie realizacje. Pierwsza z nich zakłada, że elementem podłużnym jest rezystor, a poprzecznym — kondensator. W tym przypadku

$$Z_1(s) = R; \quad Y_0(s) = sC$$

oraz

$$T(s) = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

stąd $RC = 0,1$. Z warunku tego wynika, że aby zrealizować zamierzony cel konieczne jest założenie wartości parametru jednego z elementów. Można więc przyjąć np. $R = 50 \text{ k}\Omega$ i wtedy $C = 0,1/R = 2 \text{ }\mu\text{F}$. W drugim przypadku przyjmujemy, że $Z_1(s) = sL$, $Y_0(s) = G$. Stąd $GL = 0,1$ oraz np. $L = 0,1 \text{ H}$ i $G = 0,1/L = 1 \text{ S}$. W praktyce rozwiązanie to może być nie do przyjęcia w zakresie małych częstotliwości przenoszonych sygnałów, gdyż wówczas przez elementy czwórnika płyną duże prądy wydzielające w elemencie rezystancyjnym znaczącą ilość ciepła.

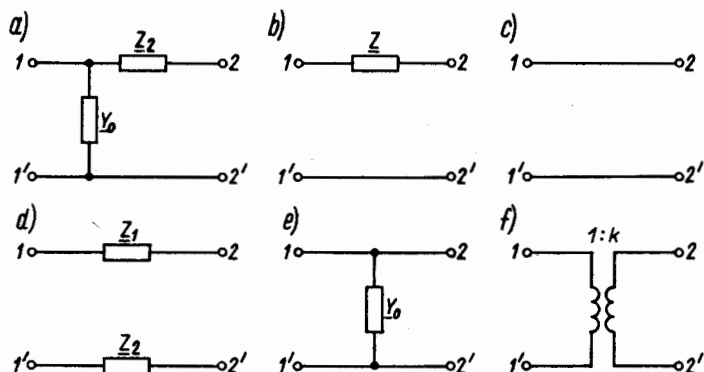
3.3. Zbadać, czy w układzie przedstawionym na rys. 3.2 możliwa jest realizacja transmitancji napięciowej, w klasie układów pasywnych, o postaci

$$T(s) = \frac{k}{s + a}$$

przy założeniu, że $k \neq a$.

Odpowiedź. Realizacja założonej transmitancji nie jest możliwa.

3.4. Wyznaczyć parametry łańcuchowe czwórników, których sposób połączenia elementów jest pokazany na rys. 3.3.



Rys. 3.3

Odpowiedź

a) $\underline{A} = 1$; $\underline{B} = \underline{Z}_2$; $\underline{C} = \underline{Y}_0$; $\underline{D} = 1 + \underline{Y}_0 \underline{Z}_2$;

b) $\underline{A} = 1$; $\underline{B} = \underline{Z}$; $\underline{C} = 0$; $\underline{D} = 1$;

Tablica 3.1



Równanie czwórnika w postaci macierzowej	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ $Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$			
Parametry macierzy ¹⁾	A	B	C	D	z_{11}	z_{12}	z_{21}	z_{22}	y_{11}	y_{12}	y_{21}	y_{22}
A	A	B	C	D	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta A}{C}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta A}{B}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$
Z	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta Z}{z_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	z_{11}	z_{12}	z_{21}	z_{22}	$\frac{z_{22}}{\Delta Z}$	$-\frac{z_{12}}{\Delta Z}$	$-\frac{z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta Z}$
Y	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{y_{22}}{\Delta Y}$	$-\frac{y_{12}}{\Delta Y}$	$-\frac{y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta Y}$	y_{11}	y_{12}	y_{21}	y_{22}
H	$-\frac{\Delta H}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{\Delta H}{h_{12}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta H}{h_{11}}$
G	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta G}{g_{21}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta G}{g_{11}}$	$\frac{\Delta G}{g_{22}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$

¹⁾ Wszystkie parametry są wyrażone w postaci operatorowej.

$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$				
h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}	g_{11}	g_{12}	g_{21}	g_{22}	
$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta A}{D}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta A}{A}$	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\Delta A = AD - BC$
$\frac{\Delta Z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{11}}$	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta Z}{z_{11}}$	$\Delta Z = z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}$
$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$\Delta Y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$
h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}	$\frac{h_{22}}{\Delta H}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta H}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta H}$	$\frac{h_{11}}{\Delta H}$	$\Delta H = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$
$\frac{g_{22}}{\Delta G}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta G}$	$-\frac{g_{21}}{\Delta G}$	$\frac{g_{11}}{\Delta G}$	g_{11}	g_{12}	g_{21}	g_{22}	$\Delta G = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$

- c) $\underline{A} = 1$; $\underline{B} = 0$; $\underline{C} = 0$; $\underline{D} = 1$;
 d) $\underline{A} = 1$; $\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$; $\underline{C} = 0$; $\underline{D} = 1$;
 e) $\underline{A} = 1$; $\underline{B} = 0$; $\underline{C} = \underline{Y}_0$; $\underline{D} = 1$;
 f) $\underline{A} = 1/k$; $\underline{B} = 0$; $\underline{C} = 0$; $\underline{D} = k$, przy czym $k = U_2/U_1$.

3.5. Korzystając z tablicy 3.1, dla czwórników z rys. 3.3 wyznaczyć macierze parametrów: impedancyjnych, admitancyjnych oraz hybrydowych. Czy dla każdego z czwórników może być sformułowany opis wszystkimi rodzajami macierzy jednocześnie?

Odpowiedź. Nie dla wszystkich czwórników jest możliwe sformułowanie opisu jednocześnie w postaci macierzy $\underline{A}$, $\underline{Z}$, $\underline{Y}$, $\underline{H}$ i $\underline{G}$. Na przykład dla czwórnika z rys. 3.3b istnieją następujące macierze:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} 1/\underline{Z} & -1/\underline{Z} \\ -1/\underline{Z} & 1/\underline{Z} \end{bmatrix};$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{bmatrix}$$

natomiast macierz $\underline{Z}$ nie istnieje.

3.6. Elektroenergetyczną linię przesyłową przedstawiono w postaci symetrycznego czwórnika typu T o strukturze analogicznej jak czwórnik pokazany na rys. 3.1. Wiedząc, że parametry elementów tego układu są odpowiednio równe: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z} = R + j\omega L = (0,0006 + j0,47) \Omega$, $\underline{Z}_0 = \frac{1}{j\omega C} = -j127,4 \Omega$, obliczyć: napięcie i prąd na wyjściu, jeśli $\underline{U}_1 = 15 \text{ kV}$, a $\underline{I}_1 = (500 + j200) \text{ A}$. Obliczyć ponadto: impedancję odbiornika, stosunek napięć, prądów i mocy na końcu i początku linii oraz kąty przesunięcia fazowego między sygnałami na wejściu i wyjściu.

ROZWIĄZANIE. Uwzględniając wyniki rozwiązania zadania 3.1, obliczamy parametry łańcuchowe

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_0} = 0,99 + j0,0$$

$$\underline{B} = 2\underline{Z} + \frac{\underline{Z}^2}{\underline{Z}_0} = 0,0012 + j0,94$$

$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_0} = j0,0078$$

Napięcie i prąd na końcu linii

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (15,1 - j0,47) \text{ kV} \\ (498 + j82) \text{ A} \end{bmatrix}$$

Stąd impedancja odbiornika

$$\underline{Z}_{\text{odb}} = -\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} = \frac{15100 - j470}{498 + j82} = (297,5 + j39,4) \Omega$$

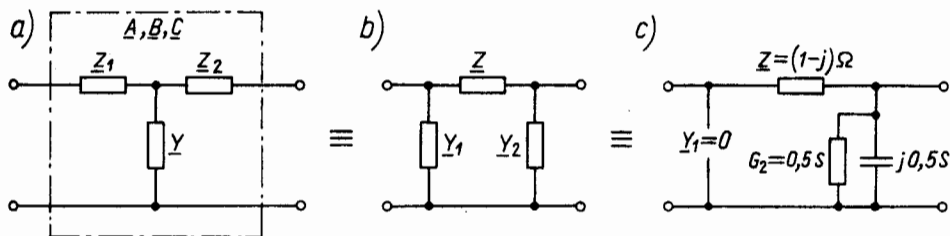
oraz odpowiednio

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 1,007 e^{-j1,8^\circ}; \quad \frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_1} = 0,93 e^{-j12,5^\circ}; \quad \frac{P_2}{P_1} = 0,997$$

3.7. Obliczyć impedancję charakterystyczną linii przesyłowej z zadania 3.6 oraz odpowiadający jej współczynnik tłumienia α i przesunięcia β .

Odpowiedź. $\underline{Z}_c = 10,9 e^{-j0,4^\circ} \Omega$; $\alpha = -0,006$; $\beta = 5,14^\circ$. Dopasowanie odbioru do linii przesyłowej występuje praktycznie przy obciążeniu rezystorem o mocy równej ok. 22,5 MW.

3.8. Znane są parametry łańcuchowe czwórnik typu T (rys. 3.4a). Wyznaczyć parametry elementów równoważnego czwórnik typu Π (rys. 3.4b) i zaproponować sposób ich realizacji (rys. 3.4c). Dane: $\underline{A} = 2$, $\underline{B} = 1 - j1$, $\underline{C} = 0,5 + j0,5$.



Rys. 3.4

ROZWIĄZANIE. Macierz parametrów łańcuchowych czwórnik typu Π ma postać

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 + \underline{Z} \underline{Y}_2 & \underline{Z} \\ \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z} & 1 + \underline{Z} \underline{Y}_1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy równania

$$1 + \underline{Z} \underline{Y}_2 = 2$$

$$\underline{Z} = (1 - j1) \Omega$$

$$\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z} = 0,5 + j0,5$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\underline{Z} = (1 - j1) \Omega; \quad \underline{Y}_1 = 0; \quad \underline{Y}_2 = (0,5 + j0,5) S.$$

Z analizy powyższych zależności wynika, że najprostszą realizacją obliczonych elementów są:

- w przypadku gałęzi o impedancji $\underline{Z}$ — szeregowo połączony rezystor i kondensator,
- w przypadku gałęzi o admitancji $\underline{Y}_1$ — jej rozwarcie (przerwa),
- w przypadku gałęzi o admitancji $\underline{Y}_2$, np. równolegle połączony rezystor i kondensator (rys. 3.4c).

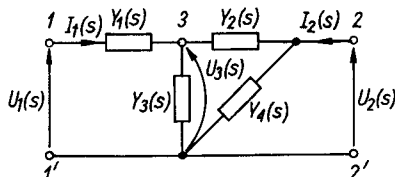
3.9. Zakładając, że parametry czwórnika typu II są odpowiednio równe: $\underline{A} = 2$, $\underline{B} = 1 - j1$, $\underline{C} = j0,2$ wyznaczyć parametry elementowego równoważnego czwórnika typu T i zaproponować ich realizację przy zastosowaniu elementów RLC. Czy jest możliwa realizacja układu przy użyciu wyłącznie elementów o dodatnich parametrach?

Odpowiedź. $\underline{Y} = j0,2 S$ — kondensator, $\underline{Z}_1 = -j5 \Omega$ — kondensator, $\underline{Z}_2 = (0,5 + j2) \Omega$ — np. szeregowe połączenie rezystora i cewki. Jest możliwa realizacja przy użyciu elementów o dodatnich parametrach.

3.10. Parametry łańcuchowe czwórnika symetrycznego wynoszą odpowiednio: $\underline{A} = 2 - j3$, $\underline{B} = 4 - j2$, $\underline{C} = -j3$. Wyznaczyć wartość skuteczną napięcia i prądu na wyjściu czwórnika oraz impedancję obciążenia, jeśli: $u_1 = 14,1 \sin(\omega t - 45^\circ)$, $i_1 = 5,65 \cos \omega t$.

Odpowiedź. $U_2 = 49,33 V$; $I_2 = 43,93 A$; $Z_{obc} = 1,12 \Omega$.

3.11. Korzystając z metody potencjałów węzłowych, wyznaczyć parametry admitancyjne czwórnika przedstawionego na rys. 3.5. Prądy, napięcia i admitancje elementów są wyrażone w postaci operatorowej.



Rys. 3.5

ROZWIĄZANIE. Macierz admitancyjna układu dla węzłów niezależnych określonych jak na rysunku, ma postać

$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_1(s) & 0 & -Y_1(s) \\ 0 & Y_2(s) + Y_4(s) & -Y_2(s) \\ -Y_1(s) & -Y_2(s) & Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Cyfry z boku macierzy i nad nią oznaczają numery wierszy i kolumn odpowiadające danemu węzłowi.

Uwzględniając równanie macierzowe wynikające z metody potencjałów węzłowych

$$\mathbf{Y} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

wyznaczamy

$$U_1(s) = \frac{\Delta_1}{\det \mathbf{Y}}; \quad U_2(s) = \frac{\Delta_2}{\det \mathbf{Y}}$$

przy czym Δ_1, Δ_2 — wyznaczniki otrzymane z macierzy admitancyjnej, w której zastąpiono odpowiednio kolumny 1 i 2 kolumną macierzy prądów.

Rozwijając wyznacznik Δ_1 i Δ_2 względem kolumny prądów, otrzymamy wyrażenia

$$\Delta_1 = \Delta_{11} I_1(s) - \Delta_{21} I_2(s); \quad \Delta_2 = -\Delta_{12} I_1(s) + \Delta_{22} I_2(s)$$

w których: Δ_{ij} — podwyznaczniki wyznacznika $\det \mathbf{Y}$ wyznaczone przez skreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny. Uwzględniając powyższe, otrzymamy

$$U_1(s) = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} [\Delta_{11} I_1(s) - \Delta_{21} I_2(s)]$$

$$U_2(s) = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} [-\Delta_{12} I_1(s) + \Delta_{22} I_2(s)]$$

Stąd po przekształceniach wyznaczamy

$$I_1(s) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11,22}} U_1(s) - \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{11,22}} U_2(s)$$

$$I_2(s) = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11,22}} U_1(s) + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{11,22}} U_2(s)$$

przy czym $\Delta_{11,22} = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} (\Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12} \Delta_{21})$ — podwyznacznik macierzy $\mathbf{Y}$ otrzymany przez skreślenie pierwszego i drugiego wiersza oraz pierwszej i drugiej kolumny.

W badanym obwodzie

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \begin{vmatrix} Y_2(s) + Y_4(s) & -Y_2(s) \\ -Y_2(s) & Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) \end{vmatrix} = \\ &= [Y_2(s) + Y_4(s)][Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)] - Y_2^2(s) \end{aligned}$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -Y_1(s) \\ -Y_2(s) & Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) \end{vmatrix} = -Y_1(s) Y_2(s)$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -Y_2(s) \\ -Y_1(s) & Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) \end{vmatrix} = -Y_1(s) Y_2(s)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{22} &= \begin{vmatrix} Y_1(s) & -Y_1(s) \\ -Y_1(s) & Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) \end{vmatrix} = \\ &= Y_1(s) [Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)] - Y_1^2(s) \end{aligned}$$

$$\Delta_{11,22} = |Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)| = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)$$

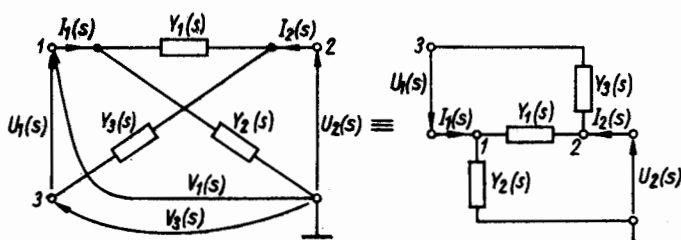
Zatem parametry admitancyjne czwórnika są odpowiednio równe

$$y_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11,22}} = Y_1(s) - \frac{Y_1^2(s)}{Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)}$$

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{11,22}} = \frac{Y_1(s) Y_2(s)}{Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)}$$

$$y_{22} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{11,22}} = Y_2(s) + Y_3(s) - \frac{Y_1(s) Y_2(s)}{Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)}$$

3.12. Wyznaczyć parametry impedancyjne czwórnika przedstawionego na rys. 3.6, stosując metodę potencjałów węzłowych. Przyjąć, że prądy, napięcia i admitancje elementów są wyrażone w postaci operatorowej.



Rys. 3.6

ROZWIĄZANIE. Uwzględniając oznaczenia podane na rysunku, macierz admitancyjna ma postać

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1(s) + Y_2(s) & -Y_1(s) & 0 \\ -Y_1(s) & Y_1(s) + Y_3(s) & -Y_3(s) \\ 0 & -Y_3(s) & Y_3(s) \end{bmatrix}$$

Równanie wynikające z metody potencjałów węzłowych ma postać

$$\mathbf{Y}(s) \begin{bmatrix} V_1(s) \\ U_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ -I_1(s) \end{bmatrix}$$

Stosując metodę wyznaczników, wyznaczamy

— napięcie na wejściu czwórnika

$$\begin{aligned} U_1(s) &= V_1(s) - V_3(s) = \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{Y}} \{ [\Delta_{11} + \Delta_{33} - \Delta_{31} - \Delta_{13}] I_1(s) + [\Delta_{23} - \Delta_{21}] I_2(s) \} \end{aligned}$$

— oraz napięcie na jego wyjściu

$$U_2(s) = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} \{ [\Delta_{32} - \Delta_{12}] I_1(s) + \Delta_{22} I_2(s) \}$$

Stąd po podstawieniu otrzymamy parametry impedancyjne czwórnika w postaci operatorowej

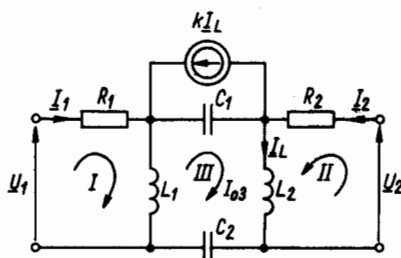
$$z_{11} = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} (\Delta_{11} + \Delta_{33} - \Delta_{31} - \Delta_{13}) = \frac{1}{Y_1(s)} + \frac{1}{Y_3(s)}$$

$$z_{12} = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} (\Delta_{23} - \Delta_{21}) = -\frac{1}{Y_1(s)}$$

$$z_{21} = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} (\Delta_{32} - \Delta_{12}) = -\frac{1}{Y_1(s)}$$

$$z_{22} = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} \Delta_{22} = \frac{1}{Y_1(s)} + \frac{1}{Y_2(s)}$$

3.13. Wyznaczyć parametry impedancyjne zespolone czwórnika przedstawionego na rys. 3.7 stosując metodę oczkową.



Rys. 3.7

ROZWIĄZANIE. Równanie macierzowe wynikające z metody oczkowej ma postać

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & 0 & -j\omega L_1 \\ 0 & R_2 + j\omega L_2 & j\omega L_2 \\ -j\omega L_1 & j\omega L_2 & j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ -\frac{k \underline{I}_L}{j\omega C_1} \end{bmatrix} \end{array}$$

Uzależniamy prąd źródłowy źródła prądu sterowanego prądem od prądów oczkowych, otrzymując

$$\underline{I}_L = \underline{I}_2 + \underline{I}_{o3}$$

Uwzględniając powyższe w trzecim równaniu, po uporządkowaniu otrzymamy

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & 0 & -j\omega L_1 \\ 0 & R_2 + j\omega L_2 & j\omega L_2 \\ -j\omega L_1 & j\omega L_2 + \frac{k}{j\omega C_1} & j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{k}{j\omega C_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Stosując metodę wyznaczników, wyznaczamy kolejno prąd wejściowy i wyjściowy czwórnika w funkcji napięć na wejściu i wyjściu. Otrzymujemy zatem równania

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\det \mathbf{Z}} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}} (\Delta_{11} \underline{U}_1 - \Delta_{21} \underline{U}_2)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\det \mathbf{Z}} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}} (-\Delta_{12} \underline{U}_1 + \Delta_{22} \underline{U}_2)$$

Po przekształceniu powyższego układu równań względem napięć wyznaczamy równania czwórnika o postaci impedancyjnej

$$\underline{U}_1 = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11,22}} \underline{I}_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{11,22}} \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11,22}} \underline{I}_1 + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{11,22}} \underline{I}_2$$

przy czym podwyznaczniki Δ_{ij} , $\Delta_{ii,jj}$ są wyznaczane analogicznie jak podwyznaczniki w zadaniu 3.11.

Podstawiając parametry elementów czwórnika, określamy

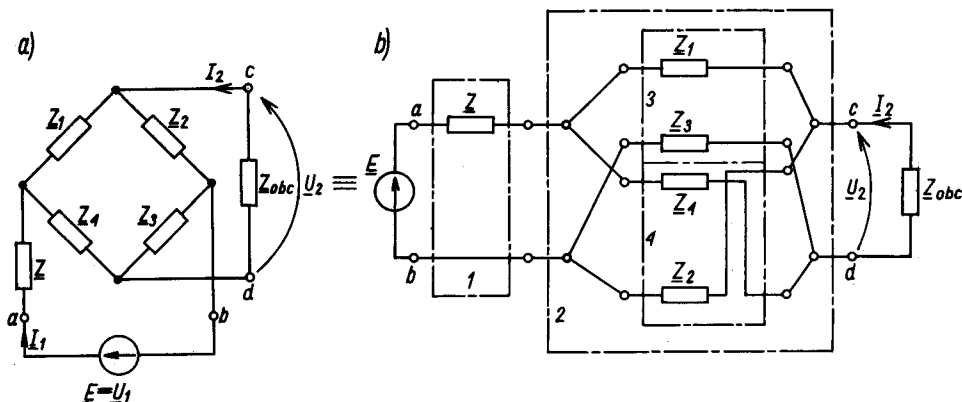
$$z_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11,22}} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1^2}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{k}{j\omega C_1}}$$

$$z_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{11,22}} = \frac{j\omega L_1(j\omega L_2 + \frac{k}{j\omega C_1})}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{k}{j\omega C_1}}$$

$$z_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11,22}} = -\frac{\omega^2 L_1 L_2}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{k}{j\omega C_1}}$$

$$z_{22} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{11,22}} = R_2 + j\omega L_2 - \frac{j\omega L_2(j\omega L_2 + \frac{k}{j\omega C_1})}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{k}{j\omega C_1}}$$

3.14. Wyznaczyć impedancję wejściową układu mostkowego przedstawionego na rys. 3.8a.



Rys. 3.8

ROZWIĄZANIE. Można przyjąć, że układ z rys. 3.8a składa się z kaskadowego (łańcuchowego) połączenia czwórników 1 i 2 (rys. 3.8b), przy czym czwórnik 2 stanowi równoległe połączenie czwórników 3 i 4.

Wyznaczamy zatem macierze admitancyjne czwórników 3 i 4

$$Y_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} & -\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}; \quad Y_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} & -\frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} \end{bmatrix}$$

Macierz zastępcza tych czwórników

$$Y_2 = Y_3 + Y_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1 + Z_3} + \frac{1}{Z_2 + Z_4} & -\frac{1}{Z_1 + Z_3} - \frac{1}{Z_2 + Z_4} \\ -\frac{1}{Z_1 + Z_3} - \frac{1}{Z_2 + Z_4} & \frac{1}{Z_1 + Z_3} + \frac{1}{Z_2 + Z_4} \end{bmatrix}$$

Macierz łańcuchową wyznaczamy korzystając z tabl. 3.1. Wówczas otrzymujemy

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(Z_2 + Z_4)(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_3 + Z_2 + Z_4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz łańcuchowa czwórnika 1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz łańcuchowa układu

$$A = A_1 A_2$$

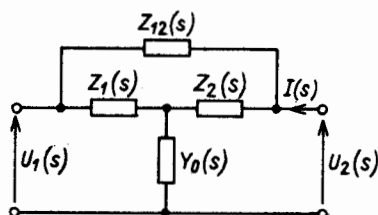
natomiast impedancja wejściowa

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A Z_{obc} + B}{C Z_{obc} + D}$$

gdzie A, B, C, D — parametry łańcuchowe czwórnika opisanego macierzą A .

3.15. Układ z rys. 3.9 przedstawić w postaci dwóch czwórników połączonych równolegle i wyznaczyć jego macierz admitancyjną jako sumę macierzy admitancyjnych członów wyodrębnionych w powyższy sposób. Ponadto wy-

znaczyć transmitancję $T(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{U_2(s)=0}$.



Rys. 3.9

Odpowiedź

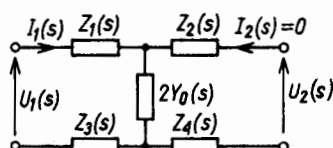
$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1 + Y_0 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Y_0 Z_1 Z_2} + \frac{1}{Z_{12}} & \frac{(1 + Y_0 Z_1)(1 + Y_0 Z_2) - Y_0(Z_1 + Z_2 + Y_0 Z_1 Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Y_0 Z_1 Z_2} - \frac{1}{Z_{12}} \\ \frac{-1}{Z_1 + Z_2 + Y_0 Z_1 Z_2} - \frac{1}{Z_{12}} & \frac{1 + Y_0 Z_1}{Z_1 + Z_2 + Y_0 Z_1 Z_2} + \frac{1}{Z_{12}} \end{bmatrix}$$

$$T(s) = -y_{21} = \frac{1 + Y_0 Z_1}{Z_1 + Z_2 + Y_0 Z_1 Z_2} + \frac{1}{Z_{12}}$$

Uwaga: Wszystkie admitancje i impedancje są wyrażone w postaci operatorowej.

3.16. Wyznaczyć macierz impedancyjną oraz transmitancję napięciową

$$T(s) = \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \text{ czwórnika przedstawionego na rys. 3.10.}$$



Rys. 3.10

Odpowiedź

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{Y_0(s)[Z_1(s) + Z_2(s)] + 2}{Y_0(s)} & \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{Y_0(s)} \\ \frac{2}{Y_0(s)} & \frac{Y_0(s)[Z_3(s) + Z_4(s)] + 2}{Y_0(s)} \end{bmatrix}$$

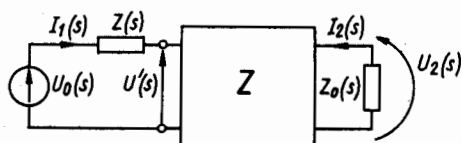
przy czym:

$$\Delta_1 = [1 + Y_0(s)Z_1(s)][1 + Y_0(s)Z_2(s)] - Y_0(s)[Z_1(s) + Z_2(s) + Y_0(s)Z_1(s)Z_2(s)]$$

$$\Delta_2 = [1 + Y_0(s)Z_3(s)][1 + Y_0(s)Z_4(s)] - Y_0(s)[Z_3(s) + Z_4(s) + Y_0(s)Z_3(s)Z_4(s)]$$

$$T(s) = \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = \frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{2}{Y_0(s)[Z_1(s) + Z_2(s)] + 2}$$

3.17. Wyprowadzić wzór określający transmitancję $T(s) = U_2(s)/U_0(s)$ czwórnika przedstawionego na rys. 3.11 w zależności od parametrów impedancyjnych.



Rys. 3.11

ROZWIĄZANIE. Równania impedancyjne czwórnika mają postać

$$\begin{bmatrix} U'(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

Uwzględniając w powyższych równaniach, że

$$I_2(s) = -\frac{U_2(s)}{Z_0(s)}; \quad U'(s) = U_0(s) - Z(s)I_1(s)$$

po uporządkowaniu otrzymamy

$$U_0(s) = [z_{11} + Z(s)]I_1(s) - \frac{z_{12}}{Z_0(s)}U_2(s)$$

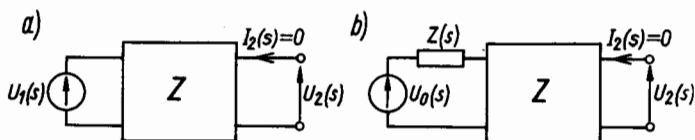
oraz

$$U_2(s) = z_{21}I_1(s) - \frac{z_{22}}{Z_0(s)}U_2(s) \Rightarrow U_2(s) = \frac{z_{21}Z_0(s)}{z_{22} + Z_0(s)}I_1(s)$$

Podstawiając prąd $I_1(s)$ z równania pierwszego w równaniu drugim, wyznaczamy transmitancję

$$T(s) = \frac{z_{21}Z_0(s)}{[z_{11} + Z(s)][z_{22} + Z_0(s)] - z_{12}z_{21}}$$

3.18. Wyznaczyć transmitancje napięciowe w funkcji parametrów impedancyjnych czwórników przedstawionych na rys. 3.12a i b.



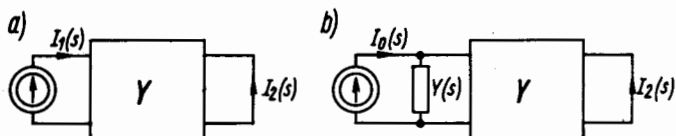
Rys. 3.12

Odpowiedź

$$\text{a) } T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{z_{21}}{z_{11}};$$

$$\text{b) } T(s) = \frac{U_2(s)}{U_0(s)} = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z(s)}$$

3.19. Wyznaczyć transmitancje prądowe w funkcji parametrów admitancyjnych czwórników przedstawionych na rys. 3.13a i b.



Rys. 3.13

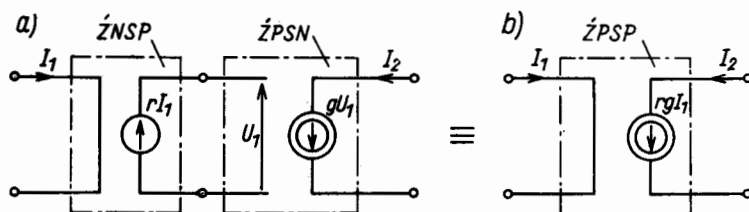
Odpowiedź

$$\text{a) } T(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{y_{21}}{y_{11}},$$

$$\text{b) } T(s) = \frac{I_2(s)}{I_0(s)} = \frac{y_{21}}{y_{11} + Y(s)}$$

3.2. Czwórnik aktywne

3.20. Na rysunku 3.14a pokazano kaskadowe połączenie źródła napięcia sterowanego prądem (ŻNSP) i źródła prądu sterowanego napięciem (ŻPSN). Wykazać, że układ ten jest równoważny źródłu prądu sterowanemu prądem (ŻPSP).



Rys. 3.14

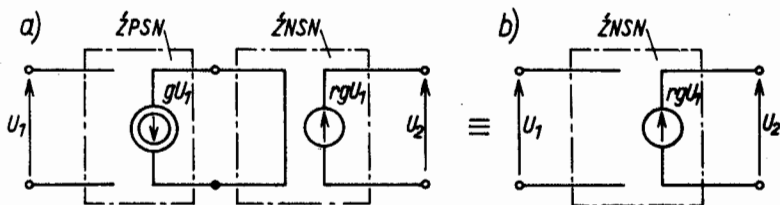
ROZWIĄZANIE. Macierz łańcuchowa układu z rys. 3.14a jest równa iloczynowi macierzy łańcuchowych obu źródeł

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{rg} \end{bmatrix}$$

ŻNSP ŻPSN ŻPSP

i jest macierzą źródła prądu sterowanego prądem (rys. 3.14b).

3.21. Wykazać równoważność układu czwórników przedstawionych na rys. 3.15a i b.



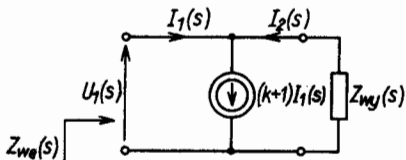
Rys. 3.15

ROZWIĄZANIE. Macierz łańcuchowa układu z rys. 3.15a, będąca iloczynem macierzy łańcuchowej $\hat{Z}_{PSN}$ i $\hat{Z}_{NSN}$, ma postać

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{rg} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

identyczną z macierzą układu z rys. 3.15b. Zatem układy są sobie równoważne.

3.22. Wyznaczyć impedancję wejściową czwórника przedstawionego na rys. 3.16.



Rys. 3.16

ROZWIĄZANIE. Impedancja wejściowa czwórника

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)}$$

Uwzględniając, że

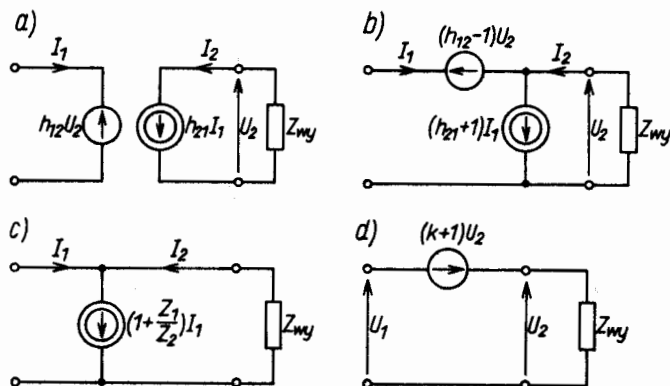
$$U_1(s) = -Z_{wy}(s)I_2(s) = Z_{wy}(s)[(k+1)I_1(s) - I_1(s)] = -Z_{wy}(s)kI_1(s)$$

wyznaczamy

$$Z_{we}(s) = -kZ_{wy}(s)$$

Powyższa zależność między impedancją wejściową a impedancją obciążenia wskazuje, że czwórnik jest konwerterem impedancji. Jeśli współczynnik k jest dodatni, to czwórnik jest konwerterem ujemnoimpedancyjnym.

3.23. Wyznaczyć impedancje wejściowe czwórników przedstawionych na rys. 3.17 a-d oraz określić typ konwertera realizowany przez poszczególne układy.



Rys. 3.17

Odpowiedź. Jeśli współczynniki h_{12} i h_{21} są rzeczywiste i dodatnie, to układy realizują:

- a) $Z_{we} = -h_{12} h_{21} Z_{wy}$ } — konwerter ujemnoimpedancyjny odwracający prąd (KU-IP)
 b) $Z_{we} = -h_{12} h_{21} Z_{wy}$ }
 c) $Z_{we} = \frac{Z_1}{Z_2} Z_{wy}$ — konwerter dodatnioimpedancyjny odwracający prąd (KD-IP)
 d) $Z_{we} = -k Z_{wy}$ — konwerter ujemnoimpedancyjny odwracający napięcie (KU-IN)

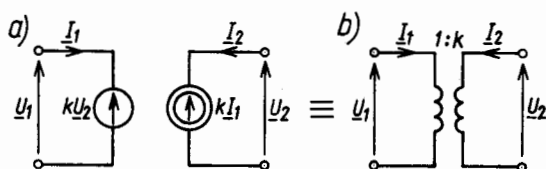
3.24. Połączenie kaskadowe dwóch czwórników wyrażają odpowiednio iloczyny macierzy łańcuchowych

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_4} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$$

Podać nazwę układów otrzymanych w wyniku powyższych realizacji zakładając, że $k_1 k_2 = k_3 k_4$.

Odpowiedź. Wynikiem realizacji są transformatory idealne, przy czym pierwszy nie odwraca fazy, a drugi odwraca fazę.

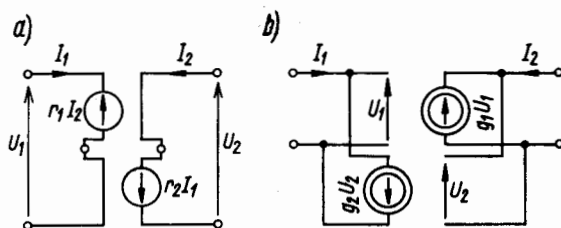
3.25. Narysować schemat obwodu pasywnego równoważnego czwórnikowi z rys. 3.18a.



Rys. 3.18

Odpowiedź. Układ przedstawia transformator idealny (rys. 3.18b).

3.26. Wyznaczyć równania impedancyjne i admitancyjne czwórników zawierających źródła sterowane połączone jak na rys. 3.19a i b oraz określić typ realizowanych inwerterów impedancji.



Rys. 3.19

Odpowiedź

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & r_1 \\ -r_2 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{b) } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ -g_1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{obydwa układy są inwerterami dodatnioimpe-} \\ \text{dancyjnymi, a przy } r_1 = r_2 \text{ oraz } g_1 = g_2 \text{ — żyra-} \\ \text{torami idealnymi.} \end{array}$$

3.27. Wiedząc, że układ przedstawiony na rys. 3.20a można modelować dwójnikiem $R_L L$, określić warunki takiej realizowalności oraz dobrać przykładowe wartości R i G w taki sposób, aby $L = 0,1 \text{ H}$; $R_L = 10 \Omega$. Przyjąć, że $k = 11$.

ROZWIĄZANIE. Uwzględniając, że oznaczone na rysunku prądy operatorowe są odpowiednio równe

$$I_1(s) = I'(s) + I''(s); \quad I'(s) = G U_1(s)$$

$$I''(s) = \frac{U_1(s) - kU_1(s)}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{(k-1)U_1(s)sC}{sRC + 1}$$

wyznaczamy

$$I_1(s) = U_1(s) \frac{(RG + 1 - k)sC + G}{sRC + 1}$$

Stąd impedancja wejściowa układu aktywnego

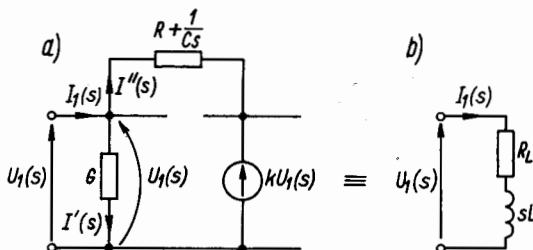
$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{sRC + 1}{(RG + 1 - k)sC + G}$$

Aby impedancja ta była równoważna impedancji pasywnego dwójnika RL , musi być spełniony warunek

$$RG + 1 - k = 0 \Rightarrow k = RG + 1$$

Przy powyższym założeniu

$$Z_{we}(s) = \frac{sRC}{G} + \frac{1}{G}$$



Rys. 3.20

Określamy warunki równoważności obu układów (rys. 3.20a i b), przyjmując

$$L = \frac{RC}{G}; \quad R_L = \frac{1}{G}$$

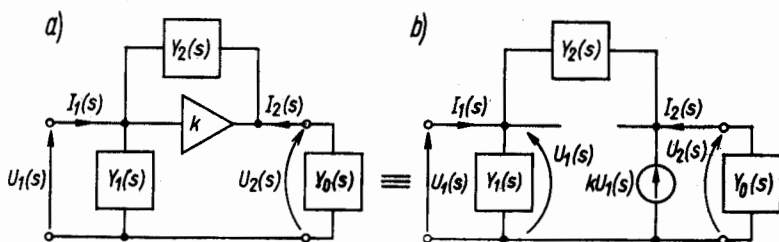
Podstawiając dane, otrzymujemy układ równań

$$RG = 10, \quad RC = 0,1 G, \quad G = 0,1$$

z którego wyznaczamy

$$R = 100 \, \Omega, \quad G = 0,1 \, \text{S}, \quad C = 10^{-4} \, \text{F}$$

3.28. Określić impedancję wejściową, transmitancję napięciowo-prądową oraz transmitancję prądowo-prądową układu przedstawionego na rys. 3.21a.



Rys. 3.21

W analizie układu uwzględnić, że wzmacniacz napięcia jest elementem idealnym, a sygnały elektryczne i parametry elementów są wyrażone w postaci operatorowej.

ROZWIĄZANIE. Zastępując wzmacniacz źródłem napięcia sterowanym napięciem, układ z rys. 3.21a możemy zastąpić układem równoważnym o strukturze jak na rys. 3.21b. Jeśli uwzględnić, że w układzie

$$I_1(s) = Y_1(s) U_1(s) + (1 - k) Y_2(s) U_1(s) = [Y_1(s) + (1 - k) Y_2(s)] U_1(s)$$

to impedancja wejściowa

$$Z_{we}(s) = \frac{1}{Y_1(s) + (1 - k) Y_2(s)}$$

Transmitancja napięciowo-prądowa układu

$$T_{U/I}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{k U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{k}{Y_1(s) + (1 - k) Y_2(s)} = k Z_{we}(s)$$

Transmitancję prądowo-prądową

$$T_I(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$$

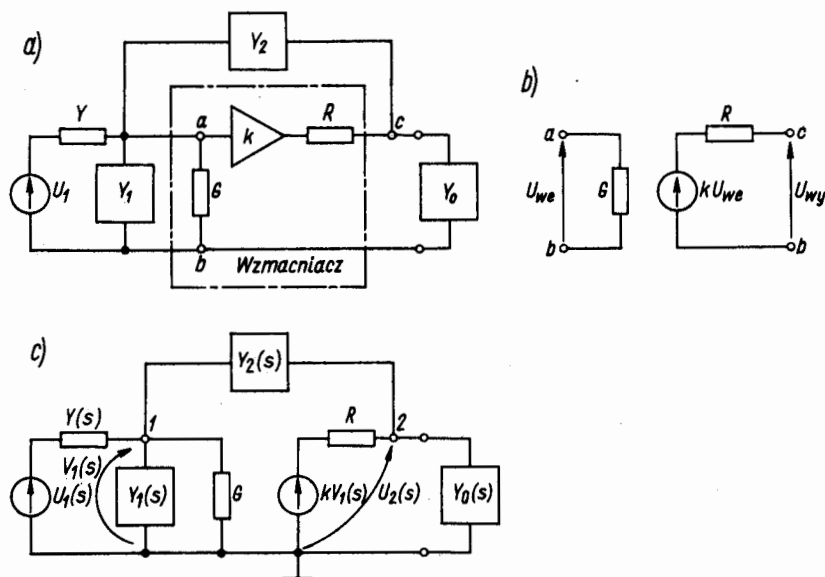
wyznamy, wyznaczając

$$I_2(s) = -Y_0(s) U_2(s) = -k Y_0(s) U_1(s)$$

stąd

$$T_I(s) = -k Y_0(s) \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = -k Y_0(s) Z_{we}(s)$$

3.29. W obwodzie przedstawionym na rys. 3.22a wzmacniacz nie jest elementem idealnym. Elementy G i R (rys. 3.22b) modelują odpowiednio skończoną wartość impedancji wejściowej wzmacniacza i zależność napięcia na jego wyjściu od obciążenia. Wyznaczyć transmitancję napięciową układu w postaci operatorowej i porównać ją z transmitancją układu zawierającego wzmacniacz idealny.



Rys. 3.22

ROZWIĄZANIE. Modelując w uproszczeniu schemat zastępczy rzeczywistego wzmacniacza w sposób pokazany na rys. 3.22b, analizowany układ przedstawiamy w postaci struktury obwodowej jak na rys. 3.22c. Korzystając z metody potencjałów węzłowych, układamy równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} Y(s) + Y_1(s) + Y_2(s) + G & -Y_2(s) \\ -Y_2(s) & Y_2(s) + \frac{1}{R} + Y_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(s) U_1(s) \\ \frac{k V_1(s)}{R} \end{bmatrix}$$

które po uporządkowaniu względem potencjałów $V_1(s)$ i $V_2(s) = U_2(s)$ przekształca się do postaci

$$\begin{bmatrix} Y(s) + Y_1(s) + Y_2(s) + G & -Y_2(s) \\ -Y_2(s) - \frac{k}{R} & Y_2(s) + \frac{1}{R} + Y_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(s) U_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczając napięcie $U_2(s)$, po uporządkowaniu otrzymujemy

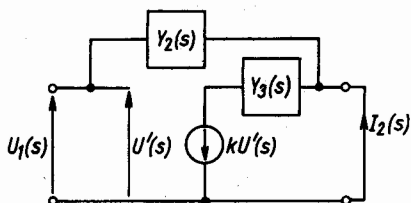
$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Y(s) \left[Y_2(s) + \frac{k}{R} \right]}{[Y(s) + Y_1(s) + Y_2(s) + G] \left[Y_2(s) + Y_0(s) + \frac{1}{R} \right] - Y_2(s) \left[Y_2(s) + \frac{k}{R} \right]}$$

Transmitancję w układzie z idealnym wzmacniaczem wyznaczmy podstawiając w powyższym wyrażeniu $R = 0$, $G = 0$. Zatem w takim przypadku

$$T(s) = \frac{k Y(s)}{Y(s) + Y_1(s) + (1 - k) Y_2(s)}$$

Z porównania wzorów wynika, że transmitancja układu z idealnym wzmacniaczem nie zależy od admitancji obciążenia $Y_0(s)$.

3.30. Wyznaczyć transmitancję prądowo-napięciową w postaci operatorowej układu przedstawionego na rys. 3.23.

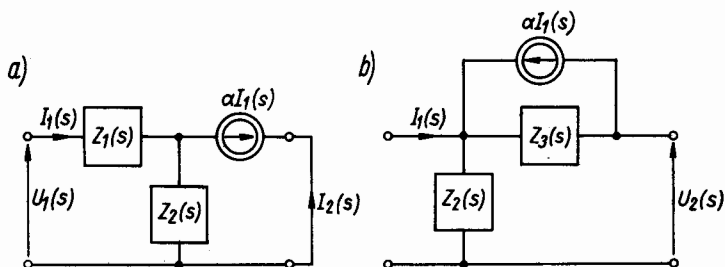


Rys. 3.23

Odpowiedź

$$T(s)_{I/U} = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{U_2(s)=0} = k Y_3(s) - Y_2(s)$$

3.31. Wyznaczyć transmitancje operatorowe układów przedstawionych na rys. 3.24a i b.



Rys. 3.24

ROZWIĄZANIE

a) Transmitancja układu z rys. 3.24a

$$T(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{U_2(s)=0} = \frac{-\alpha I_1(s)}{U_1(s)}$$

przy czym

$$U_1(s) = Z_1(s) I_1(s) + Z_2(s)(1 - \alpha) I_1(s) = [Z_1(s) + Z_2(s)(1 - \alpha)] I_1(s)$$

Zatem

$$T(s) = \frac{-\alpha}{Z_1(s) + Z_2(s)(1 - \alpha)}$$

b) Transmitancja układu z rys. 3.24b

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} \Big|_{I_2(s)=0}$$

przy czym

$$U_2(s) = Z_3(s) I_1(s) - Z_2(s) \alpha I_1(s) = [Z_3(s) - \alpha Z_2(s)] I_1(s)$$

Stąd

$$T(s) = Z_3(s) - \alpha Z_2(s)$$

3.32. Wyznaczyć warunki, jakie muszą być spełnione, by czwórnik o parametrach łańcuchowych był konwerterem impedancji. Określić parametry macierzy łańcuchowych i hybrydowych dla konwerterów ujemnoimpedancyjnych i dodatnioimpedancyjnych.

ROZWIĄZANIE. Konwerterem impedancji jest czwórnik przekształcający impedancję obciążenia $Z_{\text{obc}}(s)$ w impedancję wejściową, określoną zależnością

$$Z_{\text{we}}(s) = k Z_{\text{obc}}(s)$$

przy czym współczynnik k jest w ogólności wyrażany funkcją wymierną. Zauważmy, że impedancja wejściowa czwornika opisanego parametrami łańcuchowymi ma postać

$$Z_{\text{we}}(s) = \frac{A Z_{\text{obc}}(s) + B}{C Z_{\text{obc}}(s) + D}$$

Impedancję konwertera wyznaczmy przyjmując, że $B = 0$, $C = 0$ oraz $k = A/D$. Uwzględniając powyższe warunki stwierdzamy, że czwórnik taki opisują równania

$$U_1(s) = A U_2(s)$$

$$I_1(s) = -D I_2(s)$$

Stąd równania łańcuchowe konwertera mają postać

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}$$

natomiast równania hybrydowe postać

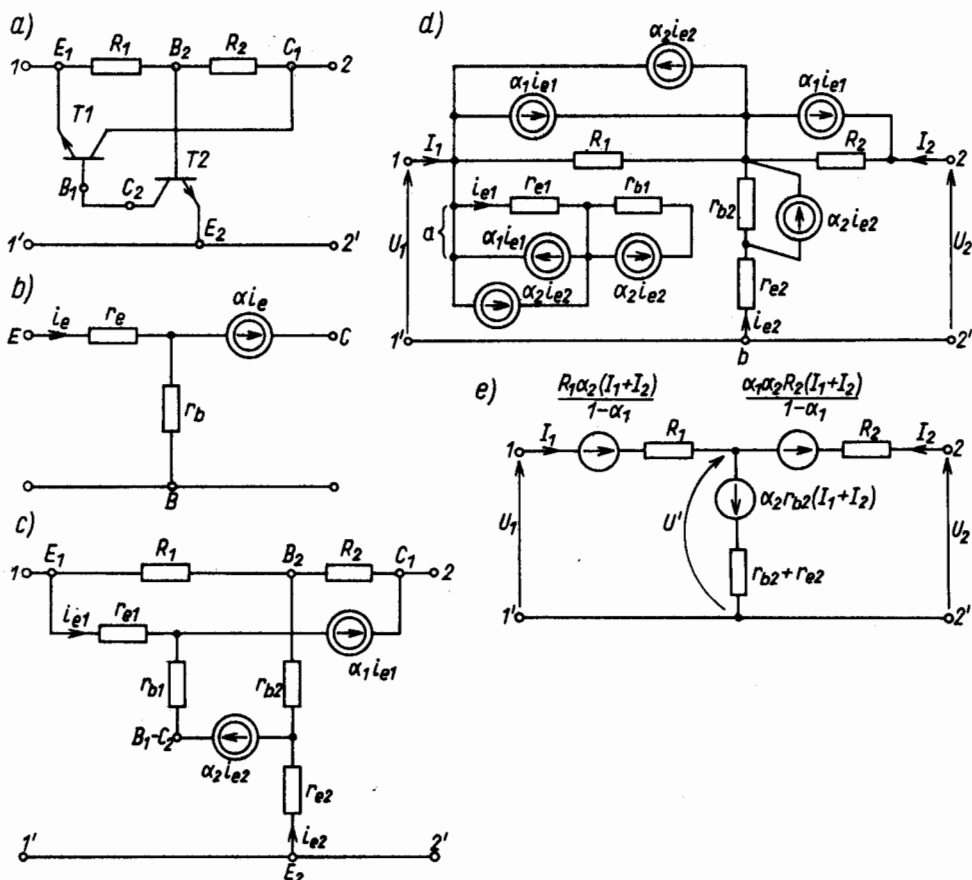
$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -\frac{1}{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Parametry i macierze określające konwertery ujemno- i dodatnioimpedancyjne są zamieszczone w tabl. 3.2.

Tablica 3.2

Lp.	Typ konwertera	Oznaczenie (w języku angielskim)	Impedancja wejściowa	Macierz hybrydowa typu H	Macierz łańcuchowa
1	Konwerter ujemno-impedancyjny	KU-I (NIC)	$Z_{we} = -k Z_{obc}$ $k = k_1 k_2 = \frac{A}{D}$ $k > 0$	$\begin{bmatrix} 0 & \pm k_1 \\ \pm k_2 & 0 \end{bmatrix}$ k_1, k_2 — stałe rzeczywiste i dodatnie	$\begin{bmatrix} \pm A & 0 \\ 0 & \pm D \end{bmatrix}$ A, D — stałe rzeczywiste i dodatnie
2	Konwerter ujemno-impedancyjny odwracający napięcie	KU-IU (VNIC)	$Z_{we} = -k Z_{obc}$	$\begin{bmatrix} 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix}$
3	Konwerter ujemno-impedancyjny odwracający prąd	KU-IP (CNIC)	$Z_{we} = -k Z_{obc}$	$\begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$
4	Konwerter dodatnioimpedancyjny	KD-I (PIC)	$Z_{we} = -k Z_{obc}$ $k = -\gamma_1 \gamma_2 = -\frac{A}{D}$ $k < 0$	$\begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$
4a	Transformator idealny	—	$Z_{we} = k^2 Z_{obc}$ $k = \frac{U_2}{U_1}$	$\begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$

3.33. Wyznaczyć parametry hybrydowe układu przedstawionego na rys. 3.25a oraz podać warunki jakie muszą być spełnione, by czwórnik był konwerterem ujemnoimpedancyjnym odwracającym napięcie.



Rys. 3.25

ROZWIĄZANIE. Korzystając z przedstawionego na rys. 3.25b schematu zastępczego tranzystora dla małych częstotliwości, wyznaczamy model obwodowy układu (rys. 3.25c). W schemacie zastępczym tranzystora oznaczono: r_e — rezystancja złącza emiter-baza, r_b — rezystancja rozproszenia między częścią aktywną bazy a doprowadzeniem, α — stosunek prądu kolektora do prądu emitera. Ponieważ w obwodzie zastępczym występują idealne źródła prądu sterowane prądem, możemy je wyeliminować stosując twierdzenie o dołączeniu do elementów oczka dodatkowych idealnych źródeł prądu. Po uporządkowaniu otrzymujemy schemat zastępczy badanego układu o postaci jak na rys. 3.25d. W obwodzie tym bilanse prądów w węzłach a i b są wyrażone równaniami

$$i_{e1} = \alpha_1 i_{e1} - \alpha_2 i_{e2} \quad \text{stąd} \quad \alpha_2 i_{e2} = i_{e1}(\alpha_1 - 1)$$

oraz

$$i_{e2} = -I_1 - I_2 \quad \text{stąd} \quad \alpha_2(I_1 + I_2) = i_{e1}(1 - \alpha_1) \quad \text{oraz} \quad i_{e1} = \frac{\alpha_2(I_1 + I_2)}{1 - \alpha_1}$$

Uwzględniając powyższe równania, czwórnik z rys. 3.25d przekształcamy do postaci pokazanej na rys. 3.25e. Dla tego czwornika

$$I_2 = -I_1 + \frac{U' + \alpha_2 r_{b2}(I_1 + I_2)}{r_{b2} + r_{e2}}$$

$$U' = U_2 - R_2 I_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 R_2 (I_1 + I_2)}{1 - \alpha_1}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$I_2[(r_{b2} + r_{e2})(1 - \alpha_1) + R_2(1 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2 R_2 - \alpha_2 r_{b2}(1 - \alpha_1)] =$$

$$= I_1[\alpha_2 r_{b2}(1 - \alpha_1) - (r_{b2} + r_{e2})(1 - \alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 R_2] + U_2(1 - \alpha_1)$$

lub

$$I_2 = \frac{1}{-1 + \frac{R_2(1 - \alpha_1)}{\Delta}} I_1 + \frac{(1 - \alpha_1)}{\Delta} U_2$$

przy czym

$$\Delta = (r_{b2} + r_{e2} + R_2 - \alpha_2 r_{b2})(1 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2 R_2$$

Jeśli $1 - \alpha_1 \approx 0$, to po uporządkowaniu otrzymujemy

$$I_2 = -I_1 \quad \text{oraz} \quad h_{21} \approx -1 \quad h_{22} = 0$$

Równanie napięciowe czwornika z rys. 3.25e ma postać

$$U_1 = U_2 - R_2 I_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 R_2 (I_1 + I_2)}{1 - \alpha_1} + R_1 I_1 - \frac{\alpha_2 R_1 (I_1 + I_2)}{1 - \alpha_1}$$

lub po uporządkowaniu

$$U_1(1 - \alpha_1) = U_2(1 - \alpha_1) - I_2[(1 - \alpha_1)R_2 + \alpha_1 \alpha_2 R_2 + \alpha_2 R_1] +$$

$$+ I_1[R_1(1 - \alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 R_2 - \alpha_2 R_1]$$

Podstawiając za I_2 wcześniej określone wyrażenie, otrzymamy

$$U_1(1 - \alpha_1) = U_2 \left\{ (1 - \alpha_1) - \frac{1 - \alpha_1}{\Delta} [R_2(1 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2 R_2 + \alpha_2 R_1] \right\} +$$

$$+ I_1 \left\{ \frac{-R_2(1 - \alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 R_2 - \alpha_2 R_1}{-1 + \frac{1 - \alpha_1}{\Delta}} + R_1(1 - \alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 R_2 - \alpha_2 R_1 \right\}$$

Jeśli, podobnie jak uczyniliśmy to wcześniej, uwzględnimy, że $1 - \alpha_1 \approx 0$, to powyższe równanie uprości się do postaci

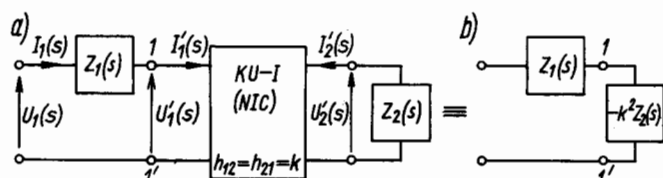
$$U_1 \approx -\frac{R_1}{\alpha_1 R_2} U_2 \quad \text{stąd} \quad h_{12} \approx -\frac{R_1}{\alpha_1 R_2} \quad h_{11} \approx 0$$

Zatem macierz hybrydowa analizowanego układu

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{R_1}{\alpha_1 R_2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jest to macierz opisująca konwerter ujemnoimpedancyjny odwracający napięcie. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że warunkiem koniecznym, by badany układ był konwerterem ujemnoimpedancyjnym jest zastosowanie tranzystora $T1$ o odpowiednio dużym wzmocnieniu prądowym ($\alpha_1 \approx 1$).

3.34. Wyznaczyć impedancję wejściową układu przedstawionego na rys. 3.26a.



Rys. 3.26

ROZWIĄZANIE. Impedancja wejściowa układu

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)}$$

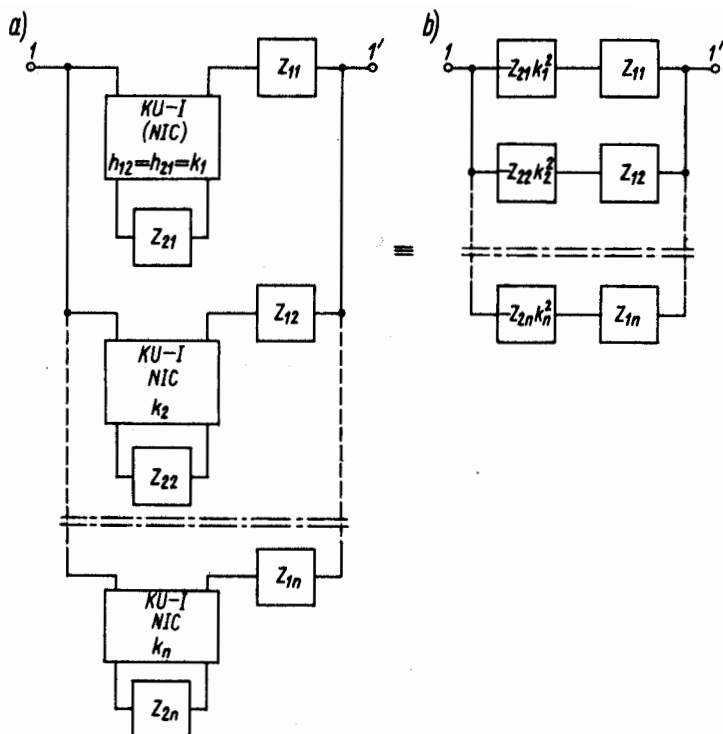
natomiast impedancja wejściowa konwertera ujemnoimpedancyjnego (KU-I) obciążonego impedancją $Z_2(s)$ jest wyrażona wzorem

$$Z'(s) = \frac{U'_1(s)}{I'_1(s)} = \frac{U'_2(s)k}{\frac{I'_2(s)}{k}} = -k^2 Z_2(s)$$

A zatem uwzględniając schemat układu z rys. 3.26b, wyznaczamy

$$Z_{we}(s) = Z_1(s) - k^2 Z_2(s)$$

3.35. Wyznaczyć impedancję wejściową n równolegle połączonych dwójników o strukturze identycznej jak dwójnik przedstawiony w zadaniu 3.34 (rys. 3.27a i b). Przyjąć współczynnik konwersji $k = 1$ dla wszystkich konwerterów.

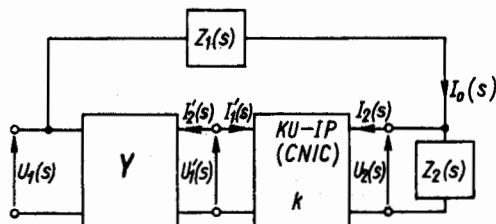


Rys. 3.27

Odpowiedź

$$Z_{we}(s) = \frac{1}{\sum_{n=1}^n \frac{1}{Z_{1n}(s) - Z_{2n}(s)}}$$

3.36. Wyznaczyć transmitancję napięciową w postaci operatorowej układu przedstawionego na rys. 3.28 wiedząc, że drugi z czwórników w łańcuchu jest konwerterem ujemnoimpedancyjnym odwracającym prąd (KU-IP).



Rys. 3.28

ROZWIĄZANIE. Z opisu konwertera ujemnoimpedancyjnego wynika, że

$$U_1'(s) = k U_2(s)$$

$$I_2'(s) = k I_1'(s)$$

Uwzględniając, że

$$I_2(s) = I_0(s) - \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{Z_1(s)} - \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} = \frac{U_1(s)}{Z_1(s)} - \frac{U_2(s)}{Z_1(s)} - \frac{U_2(s)}{Z_2(s)}$$

z drugiego równania wyznaczamy prąd

$$I_1'(s) = -I_2'(s) = \frac{1}{k} \left[\frac{U_1(s)}{Z_1(s)} - \frac{U_2(s)}{Z_1(s)} - \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} \right]$$

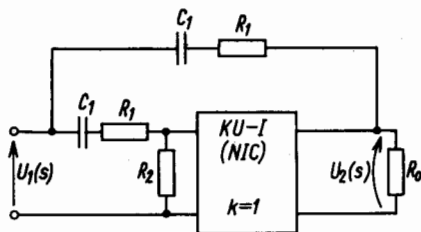
Podstawiając w drugim równaniu admitancyjnym pierwszego czwórnika za sygnały $U_1'(s)$ i $I_2'(s)$ odpowiednie wyrażenia względem napięć $U_1(s)$ i $U_2(s)$, otrzymamy

$$-\frac{1}{k} \left[\frac{U_1(s)}{Z_1(s)} - \frac{U_2(s)}{Z_1(s)} - \frac{U_2(s)}{Z_1(s)} \right] = y_{21} U_1 + k y_{22} U_2$$

Stąd po odpowiednich przekształceniach transmitancja układu

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2(s) [1 + k Z_1(s) y_{21}] k}{Z_1(s) + Z_2(s) - k^2 Z_1(s) Z_2(s) y_{22}}$$

3.37. Wyznaczyć transmitancję napięciową w postaci operatorowej układu przedstawionego na rys. 3.29 oraz określić związki między parametrami elementów układu zapewniającymi jego stabilność.



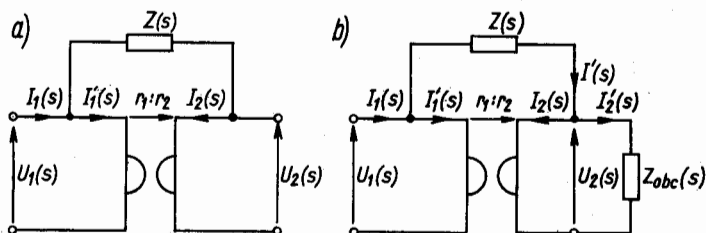
Rys. 3.29

Odpowiedź

$$T(s) = \frac{C_1 R_o R_2 s}{s C_1 R_1 (R_2 - R_o) + (R_1 - R_o)}$$

Układ jest stabilny, jeśli bieguny transmitancji są położone w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Warunek ten będzie spełniony, gdy $R_2 > R_o$, $R_1 \geq R_o$.

3.38. Wyznaczyć impedancję wejściową i transmitancję napięciową w postaci operatorowej układów zawierających żyratory (rys. 3.30) o rezystancji żyracji r_1 i r_2 .



Rys. 3.30

ROZWIĄZANIE. Równanie impedancyjne żyratora ma postać

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_1 \\ r_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

a) Uwzględniając oznaczenia pokazane na rys. 3.30a, określmy równania żyratora

$$U_1(s) = -r_1 I_2(s) \quad U_2(s) = r_2 I'_1(s)$$

przy czym

$$I_2(s) = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{Z(s)}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do pierwszego z równań admitancyjnych, po uporządkowaniu otrzymamy

$$U_1(s) \left[1 + \frac{r_1}{Z(s)} \right] = U_2(s) \frac{r_1}{Z(s)}$$

Stąd transmitancja napięciowa

$$T(s) = \frac{Z(s) + r_1}{r_1}$$

Impedancję wejściową określimy, wyznaczając prąd $I_1(s)$ w funkcji napięcia $U_1(s)$. Z analizy rozptywu prądów i rozkładu napięć w badanym układzie wynika, że

$$\begin{aligned} I_1(s) &= I_2(s) + I'_1(s) = U_2(s) \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{Z(s)} \right] + U_1(s) \frac{1}{Z(s)} = \\ &= T(s) U_1(s) \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{Z(s)} \right] + U_1(s) \frac{1}{Z(s)} \end{aligned}$$

Po przekształceniach otrzymamy

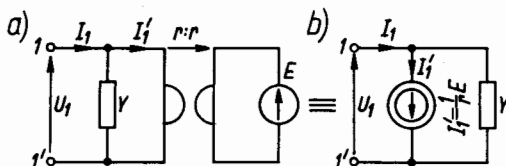
$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{r_1 r_2 Z(s)}{[Z(s) + r_1][Z(s) - r_1] + r_1 r_2}$$

b) Dla układu z rys. 3.30b postępując analogicznie, wyznaczamy odpowiednio

$$T(s) = \frac{[Z(s) + r_1] Z_{obc}(s)}{r_1 [Z(s) + Z_{obc}(s)]}$$

$$Z_{we}(s) = \frac{r_1 r_2 [Z(s) + Z_{obc}(s)]}{Z_{obc} [Z(s) + r_1 - r_1] + r_1 r_2}$$

3.39. Wykazać, że układy przedstawione na rys. 3.31a i b od strony zacisków 1-1' są sobie równoważne.



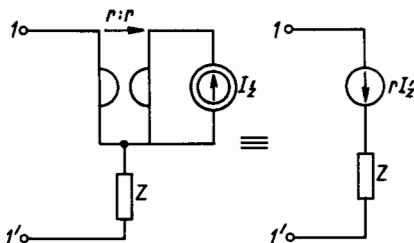
Rys. 3.31

ROZWIĄZANIE. Na wyjściu żyratora napięcie $U_2 = E$, a prąd

$$I_2' = \frac{U_2}{r} = \frac{1}{r} E$$

Równanie to można modelować źródłem prądu sterowanym napięciem. Zatem oba układy są sobie równoważne.

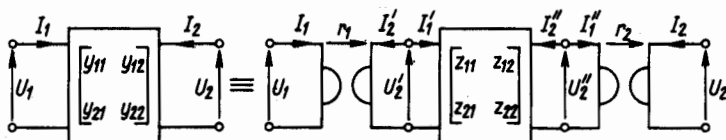
3.40. Wykazać, że układy pokazane na rys. 3.32 są sobie równoważne od strony zacisków 1-1'.



Rys. 3.32

Odpowiedź. Ponieważ żyrator obciążony źródłem prądu I_2 jest równoważny źródłu napięcia sterowanemu prądem I_2 , zatem układy są równoważne.

3.41. Wykazać, że czwórniki przedstawione na rys. 3.33 są sobie równoważne. Ponadto wyrazić parametry impedancyjne czwórnika sprzęgającego żyratory za pomocą parametrów admitancyjnych czwórnika równoważnego rozpatrywanemu układowi.



Rys. 3.33

ROZWIĄZANIE. Równania admitancyjne pierwszego czwórnika mają postać

$$I_1 = y_{11} U_1 + y_{12} U_2$$

$$I_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2$$

Równania impedancyjne czwórnika sprzęgającego

$$U_2' = z_{11} I_1' + z_{12} I_2''$$

$$U_2'' = z_{21} I_1' + z_{22} I_2''$$

Miedzy prądami i napięciami na zaciskach żyratorów zachodzą następujące zależności:

$$I_2' = -I_1' \quad U_1 = -r_1 I_2' = r_1 I_1' \Rightarrow I_1' = \frac{U_1}{r_1}$$

$$U_2' = r_1 I_1' \quad U_2'' = -r_2 I_2$$

$$I_2'' = -I_1'' \quad U_2 = r_2 I_1'' = -r_2 I_2'' \Rightarrow I_2'' = -\frac{U_2}{r_2}$$

Wyrażając zatem napięcia i prądy występujące w opisie czwórnika sprzęgającego za pomocą prądów i napięć na zaciskach zewnętrznych układu, otrzymujemy

$$r_1 I_1 = \frac{z_{11}}{r_1} U_1 - \frac{z_{12}}{r_2} U_2$$

$$-r_2 I_2 = \frac{z_{21}}{r_1} U_1 - \frac{z_{22}}{r_2} U_2$$

Po uporządkowaniu powyższego układu równań względem prądów I_1 i I_2 wyznaczamy

$$I_1 = \frac{z_{11}}{r_1^2} U_1 - \frac{z_{12}}{r_2 r_1} U_2$$

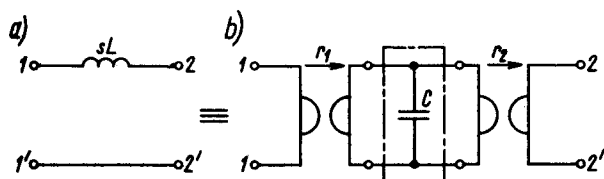
$$I_2 = -\frac{z_{21}}{r_1 r_2} U_1 + \frac{z_{22}}{r_2^2} U_2$$

Przyrównując równania te do równań opisujących pierwszy czwórnik, określamy

$$y_{11} = \frac{z_{11}}{r_1^2} \Rightarrow z_{11} = y_{11} r_1^2 \quad y_{12} = -\frac{z_{12}}{r_2 r_1} \Rightarrow z_{12} = -y_{12} r_1 r_2$$

$$y_{21} = -\frac{z_{21}}{r_1 r_2} \Rightarrow z_{21} = -y_{21} r_1 r_2 \quad y_{22} = \frac{z_{22}}{r_2^2} \Rightarrow z_{22} = y_{22} r_2^2$$

3.42. Dobrać pojemność kondensatora włączonego w układzie pokazanym na rys. 3.34b w taki sposób, aby symulował on nieziemioną cewkę o indukcyjności L (pokazaną na rys. 3.34a).



Rys. 3.34

ROZWIĄZANIE. Macierz admitancyjna nieziemionej cewki ma postać

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} \end{bmatrix}$$

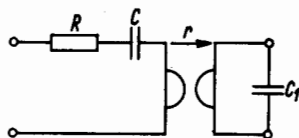
Macierz impedancyjna czwornika sprzęgającego żyratory

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{sC} & \frac{1}{sC} \\ \frac{1}{sC} & \frac{1}{sC} \end{bmatrix}$$

Na podstawie wyników poprzedniego zadania stwierdzamy, że układy będą równoważne, jeśli

$$r_1 = r_2 = r \quad \text{oraz} \quad C = \frac{L}{r^2}$$

3.43. Obliczyć moduł i argument impedancji wejściowej układu przedstawionego na rys. 3.35 wiedząc, że: $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$, $r = 2 \cdot 10^{-4} \Omega$, $C_1 = 100 \text{ }\mu\text{F}$ oraz pulsacja sygnału na wejściu $\omega = 500 \text{ rad/s}$.

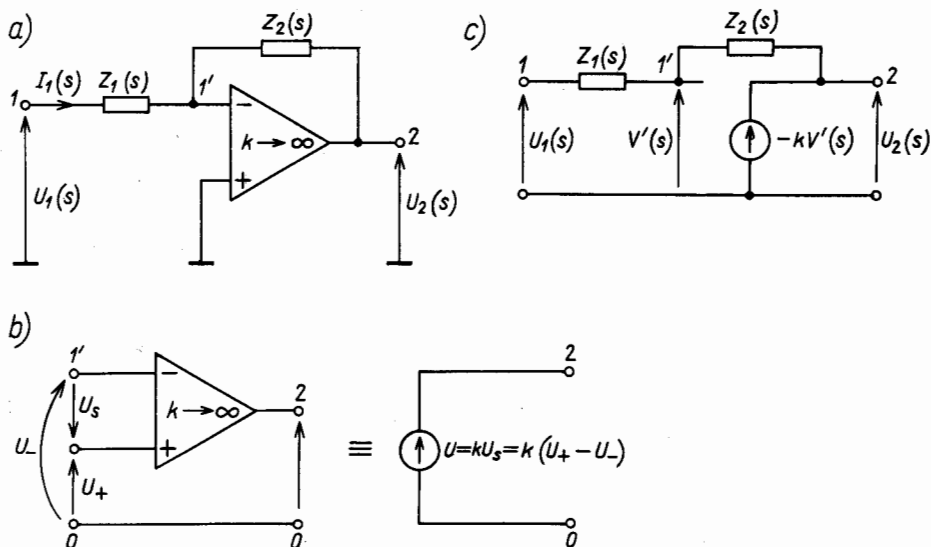


Rys. 3.35

Odpowiedź

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega C_1 r^2 - \frac{1}{\omega C} \right)} = 1 \text{ k}\Omega \quad \varphi = 0$$

3.44. Wyznaczyć transmitancję napięciową i impedancję wejściową układu przedstawionego na rys. 3.36a przy założeniu, że wzmacniacz operacyjny jest elementem idealnym.



Rys. 3.36

ROZWIĄZANIE. Idealny wzmacniacz operacyjny możemy przedstawić w postaci idealnego źródła napięcia sterowanego napięciem. Jeśli więc uwzględnimy schemat zastępczy wzmacniacza (rys. 3.36b), to badany układ możemy przekształcić do postaci pokazanej na rys. 3.36c. Dla tego układu wyznaczamy równanie wynikające z metody potencjałów węzłowych i określamy potencjał węzła 1'. Ma ono postać

$$\left[\frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} \right] V'(s) = \frac{1}{Z_1(s)} U_1(s) - \frac{1}{Z_2(s)} k V'(s)$$

Po uporządkowaniu względem potencjału $V'(s)$ jako niewiadomej

$$\left[\frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} (1 + k) \right] V'(s) = \frac{1}{Z_1(s)} U_1(s)$$

Stąd

$$V'(s) = \frac{U_1(s)}{\left[\frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} (1 + k) \right] Z_1(s)}$$

Uwzględniając, że $U_2(s) = -kV'(s)$, wyznaczamy transmitancję

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = - \frac{k}{\left[\frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} (1 + k) \right] Z_1(s)}$$

W przypadku, gdy założymy, że współczynnik wzmocnienia $k \approx \infty$, transmitancję badanego układu wyraża zależność

$$T(s) = - \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Impedancję wejściową wyznaczamy, bilansując napięcia w oczku utworzonym z elementów o napięciu $U_1(s)$ i $V'(s)$ oraz impedancji $Z_1(s)$. Otrzymujemy

$$U_1(s) - Z_1(s) I_1(s) - V'(s) = 0$$

lub

$$U_1(s) - Z_1(s) I_1(s) - \frac{U_1(s)}{\left[\frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} (1 + k) \right] Z_1(s)} = 0$$

Stąd

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{Z_1(s) [Z_2(s) + Z_1(s)(1 - k)]}{Z_2(s) + Z_1(s)(1 - k) - Z_2(s)}$$

Jeśli przyjmiemy $k \approx \infty$, to

$$Z_{we}(s) = Z_1(s)$$

3.45. W czwórniku jak na rys. 3.36a wiedząc, że napięcie $u_1(t) = 2\sin\omega t$, wyznaczyć wartość chwilową napięcia na wyjściu czwórnik w stanie ustalonym dla następujących parametrów elementów układu:

a) $Z_1(s) \Rightarrow R_1 = 4 \text{ k}\Omega$, $Z_2(s) \Rightarrow R_2 = 12 \text{ k}\Omega$, $k \approx \infty$;

b) $Z_1(s) \Rightarrow R_1 = 4 \text{ k}\Omega$, $Z_2(s) = \frac{1}{sC_2} \Rightarrow C_2 = 10 \text{ nF}$, $\omega = 10 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$, $k \approx \infty$;

c) $Z_1(s) = \frac{1}{sC_1} \Rightarrow C_1 = 1 \text{ nF}$, $Z_2(s) \Rightarrow R_2 = 50 \text{ k}\Omega$, $\omega = 10 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$, $k \approx \infty$.

ROZWIĄZANIE. Metodykę postępowania przedstawimy podając rozwiązanie dla przypadku b).

Korzystając ze wzoru na transmitancję, wyznaczamy

$$U_2(s) = T(s) U_1(s) = - \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} U_1(s)$$

Podstawiając $s = j\omega$, możemy przekształcić wyrażenia o postaci operatorowej w wyrażenia zespolone. W przypadku relacji między sygnałami opisują one układ w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennym w funkcji czasu. Otrzymamy odpowiednio

$$U_1(s) \Rightarrow \underline{U}_1(j\omega) = \underline{U}_1; \quad U_2(s) \Rightarrow \underline{U}_2(j\omega) = \underline{U}_2$$

$$Z_1(s) = R_1 \Rightarrow \underline{Z}_1(j\omega) = \underline{Z}_1 = R_1; \quad Z_2(s) = \frac{1}{sC_2} \Rightarrow \underline{Z}_2(j\omega) = \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$$

A zatem napięcie na wyjściu czwórnika w postaci zespolonej

$$\underline{U}_2 = - \frac{1}{j\omega R_1 C_2} \underline{U}_1 = \frac{1}{\omega R_1 C_2} e^{j\pi/2} \underline{U}_1$$

Jeśli uwzględnimy, że w tym przypadku $\underline{U}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, to

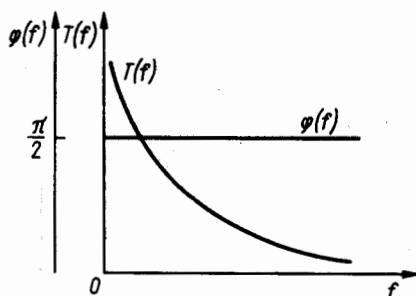
$$\underline{U}_2 = - \frac{1}{j\omega R_1 C_2} \underline{U}_1 = \frac{\sqrt{2}}{\omega R_1 C_2} e^{j\pi/2} = j \frac{\sqrt{2}}{\omega R_1 C_2} = j 10 \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ V}$$

wartość chwilowa zaś

$$u_2(t) = \text{Im} \left(\sqrt{2} \underline{U}_2 e^{j\omega t} \right) = 5 \sin(\omega t + \pi/2) = 5 \cos \omega t \text{ V}$$

Odpowiedź. a) $u_2(t) = 6 \sin \omega t$; c) $u_2(t) = - \cos \omega t \text{ V}$.

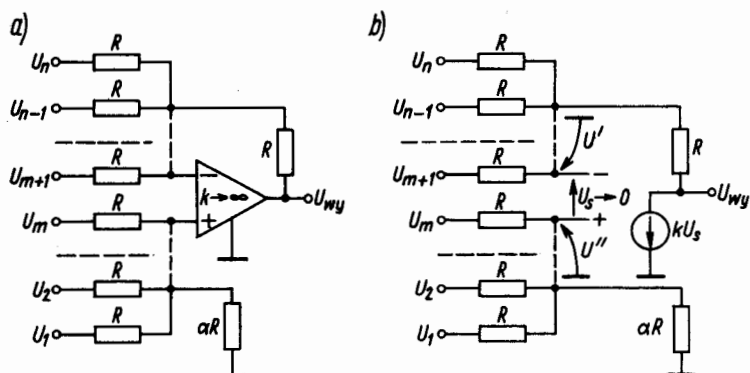
3.46. Wyznaczyć charakterystykę amplitudową i fazową transmitancji układu z rys. 3.36a dla danych jak w zadaniu 3.45 p. b).



Rys. 3.37

Odpowiedź. Charakterystyka amplitudowa i fazowa jest przedstawiona na rys. 3.37.

3.47. Uzasadnić, że układ przedstawiony na rys. 3.38a jest sumatorem napięć. Przyjąć, że wzmacniacz operacyjny jest elementem idealnym.



Rys. 3.38

ROZWIĄZANIE. Równoważny schemat obwodowy sumatora jest przedstawiony na rys. 3.38b. Ze schematu tego wynika, że suma prądów w węźle minus (-) wzmacniacza jest określona zależnością

$$\frac{U_n - U'}{R} + \frac{U_{n-1} - U'}{R} + \dots + \frac{U_{m+1} - U'}{R} = \frac{U' - U_{wy}}{R}$$

natomiast w węźle plus (+) zależnością

$$\frac{U_1 - U''}{R} + \frac{U_2 - U''}{R} + \dots + \frac{U_m - U''}{R} = \frac{U''}{\alpha R}$$

W idealnym wzmacniaczu operacyjnym napięcie sterujące $U_s \approx 0$, stąd $U'' \approx U'$, a równania dla węzłów (-) i (+) upraszczają się do postaci

$$U_n + U_{n+1} + \dots + U_{m+1} = U'(n - m + 1) - U_{wy}$$

$$U_1 + U_2 + \dots + U_m = U' \left(m + \frac{1}{\alpha} \right)$$

Napięcie wyjściowe U_{wy} jest sumą algebraiczną napięć wejściowych $U_1, \dots, U_n$, jeśli współczynniki przy U' w obu równaniach są sobie równe. A zatem

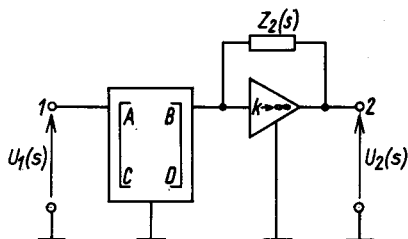
$$n - m + 1 = m + \frac{1}{\alpha}; \quad \text{stąd} \quad \alpha = \frac{1}{n + 1 - 2m}$$

Zakładając, że współczynnik rezystancji doziemnej jest określony powyższą zależnością, po odjęciu pierwszego równania od drugiego otrzymujemy

$$U_{wy} = U_1 + U_2 + \dots + U_m - U_{m+1} - \dots - U_{n-1} - U_n$$

Z zależności tej wynika, że analizowany układ jest sumatorem wówczas, gdy do każdego z wejść wzmacniacza jest dołączona jednakowa liczba zacisków sumacyjnych ($n = 2m$). W takim przypadku $\alpha = 1$. Jeśli zaś $m > n/2$, to w układzie z rys. 3.38a nie jest możliwe algebraiczne sumowanie sygnałów.

3.48. Wyznaczyć transmitancję napięciową układu przedstawionego na rys. 3.39. Przyjąć, że wzmacniacz operacyjny jest elementem idealnym.

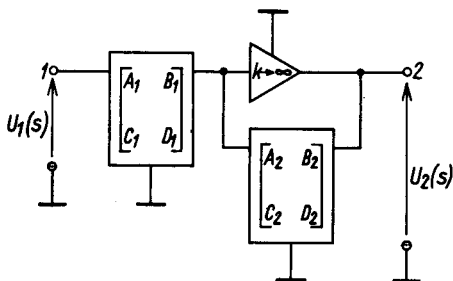


Rys. 3.39

Odpowiedź

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = - \frac{Z_2(s)}{B}$$

3.49. Wyznaczyć transmitancję napięciową układu przedstawionego na rys. 3.40. Założyć, że wzmacniacz operacyjny jest elementem idealnym, a czwórnik opisany parametrami A_2, B_2, C_2, D_2 jest odwracalny.

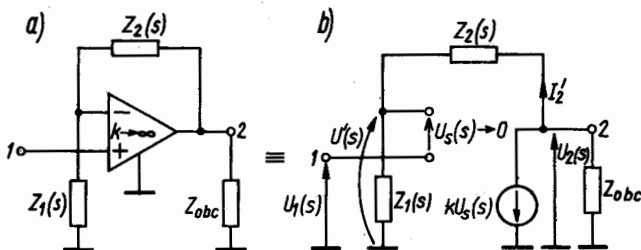


Rys. 3.40

Odpowiedź

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{B_2}{B_1}$$

3.50. Wyznaczyć transmitancję napięciową w postaci operatorowej układu przedstawionego na rys. 3.41a. Założyć, że wzmacniacz operacyjny jest elementem idealnym.



Rys. 3.41

ROZWIĄZANIE. Przekształcając układ z rys. 3.41a do równoważnej postaci pokazanej na rys. 3.41b, wyznaczamy napięcie sterujące wzmacniacza

$$U_s(s) = U'(s) - U_1(s) = -\frac{U_2(s)}{k}$$

przy czym

$$U'(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} U_2(s)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$U_1(s) = U_2(s) \left[\frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} + \frac{1}{k} \right] = \frac{k Z_1(s) + Z_1(s) + Z_2(s)}{k [Z_1(s) + Z_2(s)]} U_2(s)$$

Stąd transmitancja napięciowa układu

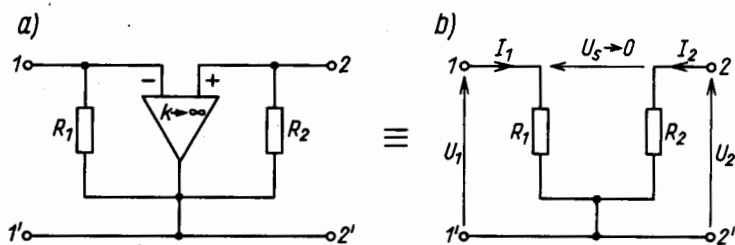
$$T(s) = \frac{k [Z_1(s) + Z_2(s)]}{k Z_1(s) + Z_2(s) + Z_1(s)}$$

Jeśli przyjąć, że $k \approx \infty$, to

$$T(s) = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Transmitancja napięciowa układu nie zależy od impedancji obciążenia.

3.51. Uzasadnić, że układ przedstawiony na rys. 3.42a jest konwerterem ujemnoimpedancyjnym odwracającym prąd.



Rys. 3.42

ROZWIĄZANIE. Po założeniu, że wzmacniacz operacyjny jest elementem idealnym (napięcie sterujące jest w przybliżeniu równe zero) oraz przekształceniu układu z rys. 3.42a do postaci pokazanej na rys. 3.42b, stwierdzamy że

$$U_1 = U_2$$

Uwzględniając, że

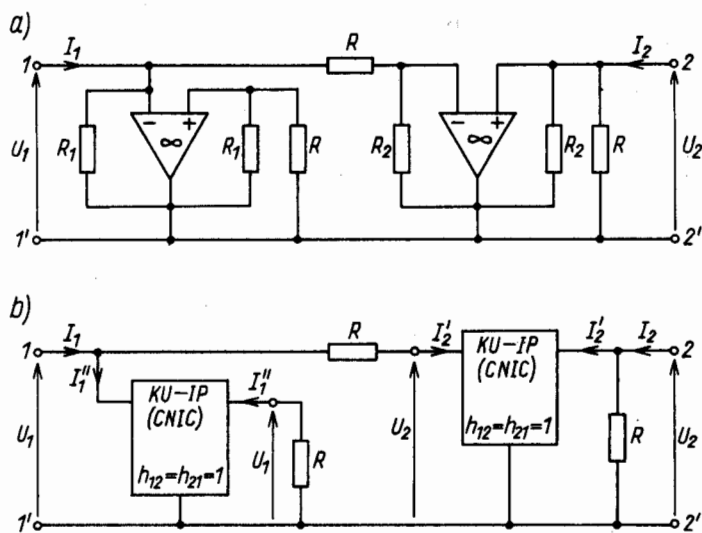
$$R_1 I_1 = R_2 I_2; \quad I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1$$

wyznaczamy równanie hybrydowe czwórnika w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{R_1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczona macierz hybrydowa jest macierzą konwertera ujemnoimpedancyjnego odwracającego prąd (KU-IP).

3.52. Wykazać, że układ przedstawiony na rys. 3.43a jest równoważny układowi z rys. 3.43b. Ponadto wyznaczyć macierz impedancyjną układu i określić rodzaj realizowanego inwertera impedancji.



Rys. 3.43

Odpowiedź. Macierz impedancyjna układu

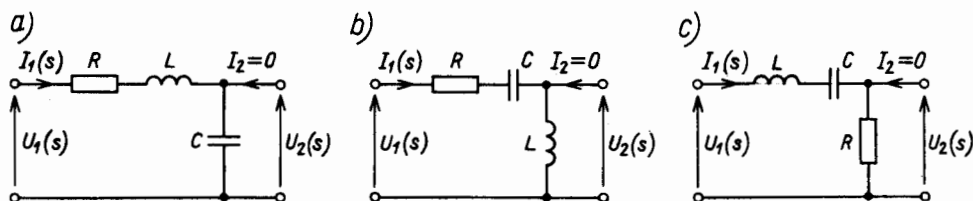
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ -R & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą inwertera dodatnioimpedancyjnego, a więc zyratora.

3.3. Filtry częstotliwościowe

3.3.1. Filtry pasywne

3.53. Wyznaczyć w postaci operatorowej transmitancje napięciowe czwórników pokazanych na rys. 3.44a, b, c. Określić rodzaj filtru realizowanego przez każdy z czwórników.



Rys. 3.44

ROZWIĄZANIE. Przy założeniu, że czwórniki nie są obciążone można stwierdzić, że od strony zacisków wejściowych przedstawiają układ szeregowy *RLC*. Zatem prąd

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)}{R + Ls + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{L} U_1(s) s}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{1}{L} U_1(s) s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

przy czym:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ — pulsacja charakterystyczna,}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_{kr}}{2R} \text{ — dobroć transmitancji,}$$

$$R_{kr} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ — rezystancja krytyczna obwodu szeregowego } RLC.$$

Transmitancje napięciowe czwórników z rys. 3.44a, b, c mają odpowiednio postać

$$T_C(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2=0} = \frac{\frac{1}{sC} I_1(s)}{U_1(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

$$T_L(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2=0} = \frac{Ls I_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

$$T_R(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2=0} = \frac{RI_1(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Z analizy standardowych postaci transmitancji wynika, że poszczególne czwórniki zachowują się odpowiednio jak filtry dolno-, górno- i środkowoprzepustowe.

3.54. Wyznaczyć wartość graniczną dobroci, transmitancji wyprowadzonych w zadaniu 3.53, przy której moduły transmitancji filtrów dolno- i górno-przepustowego nie zawierają ekstremów. Sprawdzić, czy rezystancja filtrów o dobroci granicznej jest równa, mniejsza lub większa od rezystancji krytycznej obwodu szeregowego RLC . Ponadto narysować przebiegi modułu i argumentu wszystkich trzech transmitancji w funkcji częstotliwości dla: $Q = Q_k$, $Q = 0,5Q_k$ i $Q = 2Q_k$.

ROZWIĄZANIE. O istnieniu lub nieistnieniu ekstremum funkcji decyduje wartość pierwszej pochodnej. Wyznaczamy więc kolejno pochodną transmitancji $T_C(\omega)$ i $T_L(\omega)$ względem pulsacji, podstawiając w transmitancjach operatorowych $s = j\omega$. Po podstawieniu $s = j\omega$, znalezieniu modułu i uporządkowaniu, otrzymujemy

$$T_C(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}}$$

$$T_L(\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}}$$

Znajdując pochodną transmitancji $T_C(\omega)$ i przyrównując ją do zera, otrzymujemy wyrażenie

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega = 0$$

Po uporządkowaniu wyznaczamy pulsację

$$\omega_{1C} = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{2Q^2 - 1}$$

przy której występuje ekstremum. W układzie fizycznym (w badanym obiekcie) ekstremum wystąpi wówczas, gdy wyrażenie pod pierwiastkiem będzie większe od zera. Zatem graniczna wartość dobroci wynika z zależności

$$2Q^2 - 1 \geq 0$$

stąd

$$Q_{kc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wyznaczając pochodną transmitancji $T_L(\omega)$ i przyrównując ją do zera, określamy wyrażenie

$$2\omega \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \omega^2 \right] - \omega^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \omega \right] = 0$$

Po przekształceniach wyznaczamy pulsację

$$\omega_{2L} = Q\omega_0 \sqrt{\frac{2}{2Q^2 - 1}}$$

przy której występuje ekstremum transmitancji $T_L(\omega)$. Warunkiem koniecznym, by pulsacja ω_{2L} była liczbą rzeczywistą i różną od zera jest

$$2Q^2 - 1 > 0$$

Jest to warunek analogiczny jak w przypadku transmitancji $T_C(\omega)$. Jeśli natomiast powyższe wyrażenie przekształca się do postaci

$$2Q^2 - 1 \leq 0$$

to wyrażenie określające pulsację nie znajduje interpretacji fizycznej. Zatem graniczna dobroć jest wyrażona wzorem

$$Q_{kL} = \frac{1}{\sqrt{2}} = Q_{kc}$$

Z przeprowadzonych wyżej rozważań wynika, że na charakterystyce częstotliwościowej filtru dolno- i górnoprzepustowego wystąpi ekstremum, gdy dobroć filtru

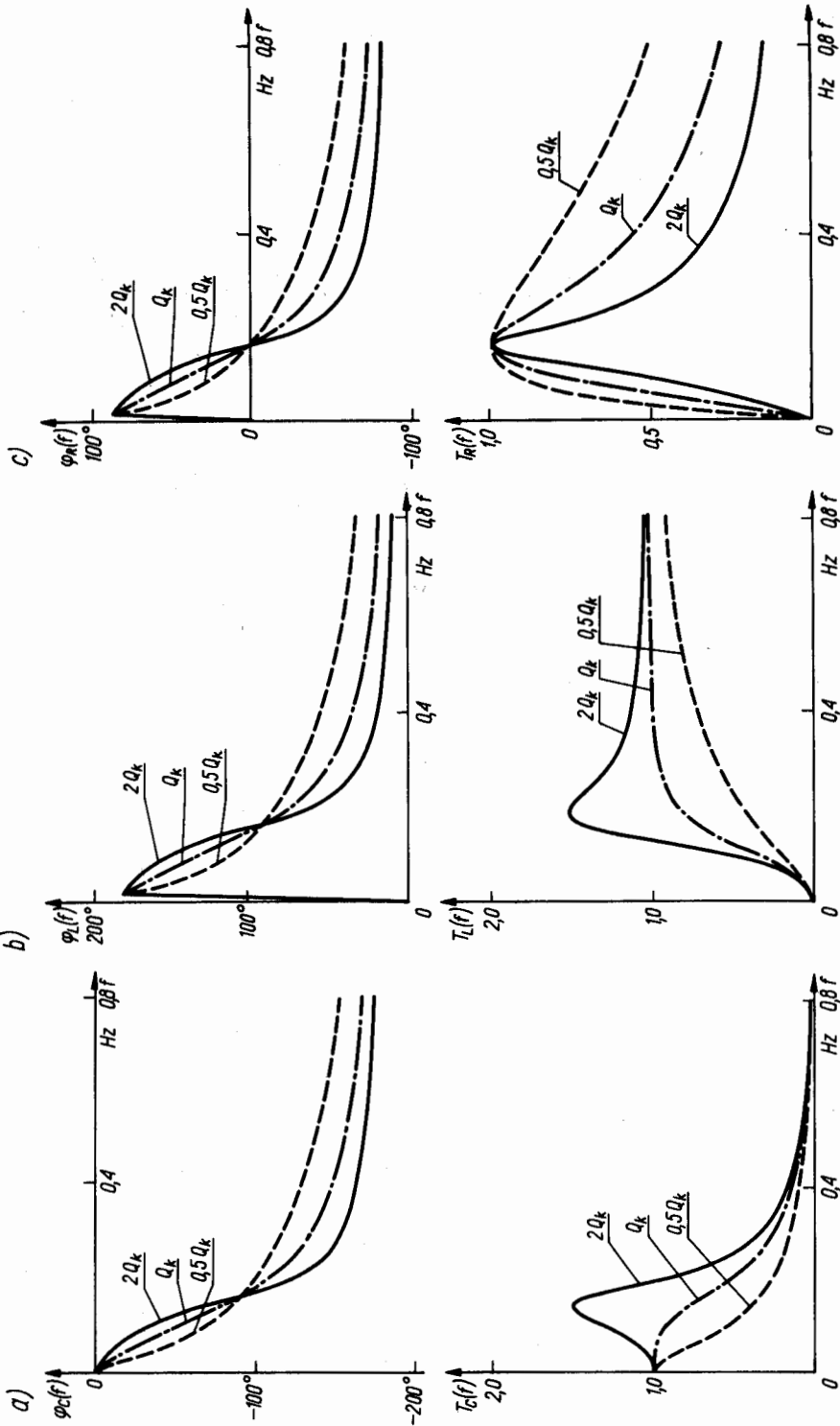
$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

W przypadku filtrów o konstrukcji jak na rys. 3.44a, b, c dobroć graniczna — odwrotnie proporcjonalna do rezystancji R — osiągnie swoją wartość, gdy rezystancja

$$R = \frac{R_{kr}}{2\sqrt{2}}$$

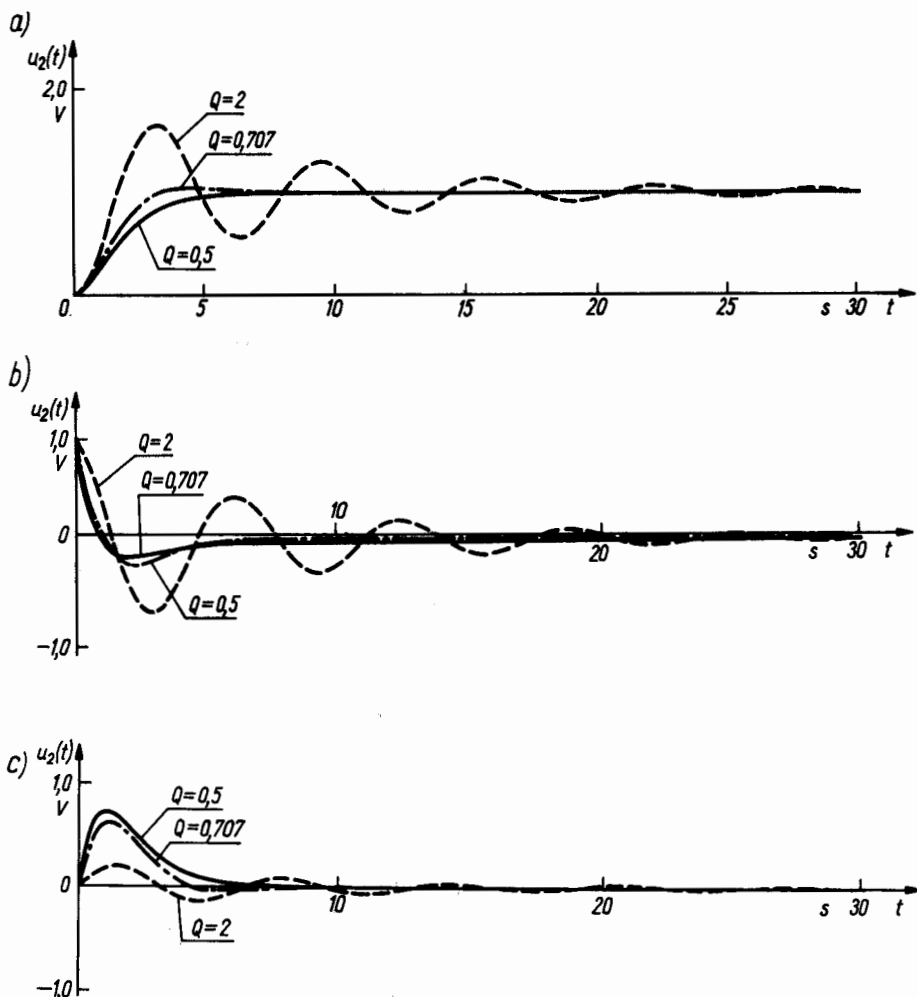
W przypadku $R = R_{kr}$ dobroć tych filtrów $Q = 0,5$.

Na rysunku 3.45a, b, c przedstawiono przebiegi — w funkcji częstotliwości f — modułu i argumentu transmitancji filtrów: dolno-, górno- i środkowo-przepustowego dla określonych w zadaniu dobroci. Obliczenia wykonano dla: $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$ oraz dla rezystancji zależnych od założonych dobroci.



Rys. 3.45

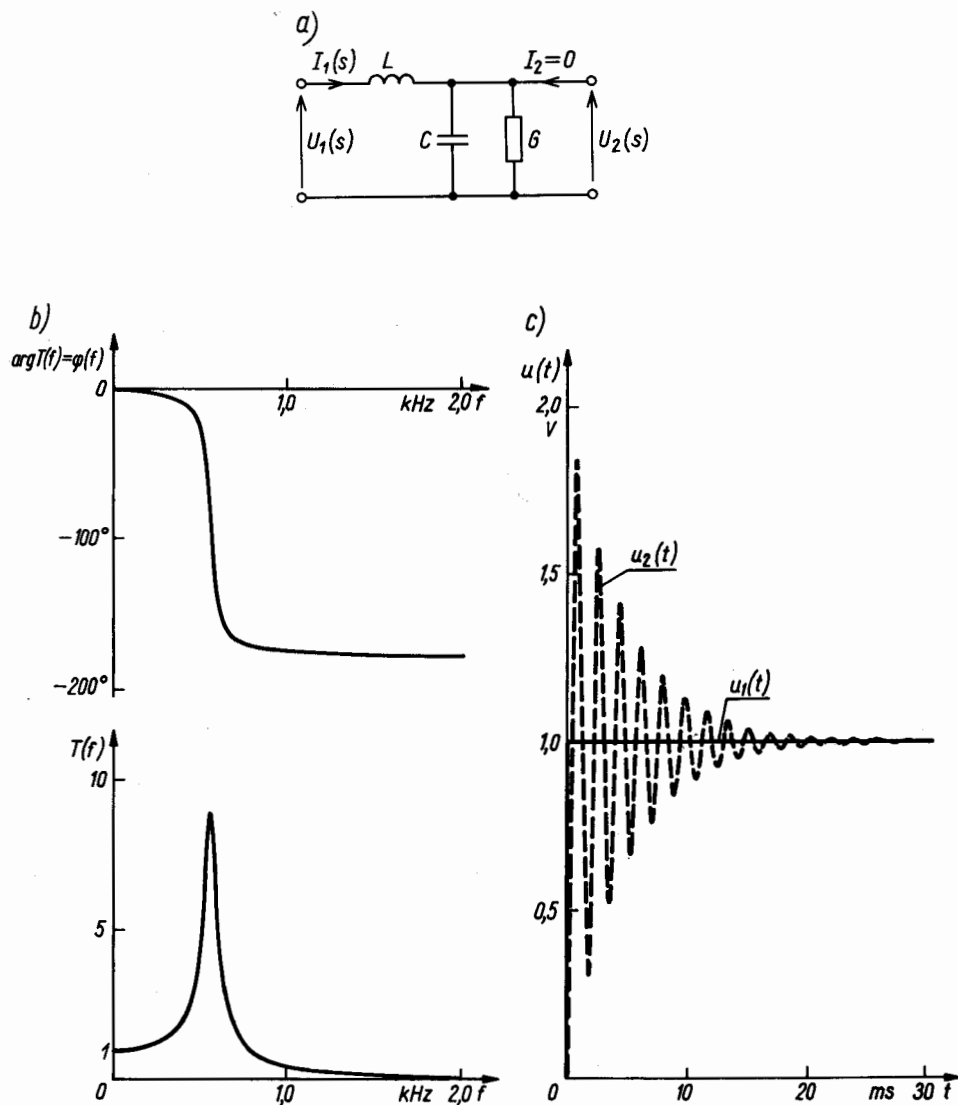
3.55. Wyznaczyć przebieg napięcia na wyjściu układów przedstawionych na rys. 3.44a, b, c po załączeniu na wejściu, w chwili $t = 0$, źródła napięcia stałego o napięciu $E = 1$ V. Obliczenia wykonać dla trzech przypadków: $Q = 0,5$; $Q = 0,707$; $Q = 2$.



Rys. 3.46

Odpowiedź. Na rysunku 3.46a, b, c pokazano przebiegi napięcia na wyjściu układu w funkcji czasu dla założonych dobroci, odpowiadające odpowiednio układowi z rys. 3.44a, b, c. Charakterystyczną właściwością prezentowanych przebiegów jest to, że dla dobroci $Q > 1/2$ sygnał na wyjściu filtra — pobudzonego sygnałem jednostkowym na wejściu — jest oscylacyjny; natomiast dla $Q \leq 1/2$ odpowiedź filtra jest aperiodyczna.

3.56. Czwórnik przedstawiony na rys. 3.47a jest filtrem dolnoprzepustowym drugiego rzędu.



Rys. 3.47

Wyznaczyć jego transmitancję napięciową, dobierając tak elementy układu, by zrealizować filtr o parametrach: dobroć $Q = 5$, częstotliwość graniczna $f_1 = 1$ kHz. Narysować jego charakterystyki częstotliwościowe i odpowiedź na skok jednostkowy.

ROZWIĄZANIE. Stosując do opisu badanego czwórnika równania łańcuchowe stwierdzamy, że transmitancja napięciowa

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{A}$$

gdzie A — parametr łańcuchowy.

Parametr łańcuchowy A dla czwórnika typu Π wyznaczamy z zależności

$$A = 1 + Z Y_2 = 1 + Ls(sC + G) = LCs^2 + LGS + 1 = \frac{1}{LC} \left(s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} \right)$$

Stąd transmitancja

$$T(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

przy czym:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ — pulsacja charakterystyczna (graniczna);}$$

$$Q = \frac{C\omega_0}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ — dobroć filtru.}$$

Podstawiając dane, otrzymujemy równania

$$(2\pi \cdot 1000)^2 = \frac{1}{LC}; \quad 5 = \frac{2\pi \cdot 1000 C}{G}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań jest możliwe, jeśli założymy jeden z parametrów filtru. Przyjmując np. $L = 0,1$ H, z pierwszego równania znajdujemy $C = 0,8 \mu\text{F}$, z drugiego zaś wyznaczamy $G = 0,3$ mS.

Charakterystyki częstotliwościowe wyznaczmy podstawiając $s = j\omega$ w wyrażeniu określającym transmitancję. Otrzymujemy więc wyrażenia określające moduł

$$T(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}}$$

oraz argument

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[T(j\omega)]}{\text{Re}[T(j\omega)]} = \arctg \frac{\frac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Odpowiedź układu na załączenie na wejściu czwórnika w chwili $t = 0$ napięcia stałego o wartości $u_1(t) = 1$ V (skok jednostkowy na wejściu) wyznaczamy z zależności

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(s)U_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \frac{1}{s}\right)$$

gdzie symbol $\mathcal{L}^{-1}$ oznacza transformatę odwrotną Laplace'a. Znajdując transformatę odwrotną powyższego wyrażenia, wyznaczamy

$$u_2(t) = 1 + \frac{\omega_0 Q}{\sqrt{1-4Q^2}} e^{s_1 t} - \frac{\omega_0 Q}{\sqrt{1-4Q^2}} e^{s_2 t}$$

przy czym:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1-4Q^2} \\ s_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1-4Q^2} \end{aligned} \right\} \text{— bieguny transmitancji}$$

Na rysunku 3.47b przedstawiono przebieg modułu $T(f)$ i argumentu $\varphi(f)$ transmitancji w funkcji częstotliwości oraz na rys. 3.47c — odpowiedź układu na skok jednostkowy [napięcie $u_2(t)$].

3.57. Dane są filtry dolnoprzepustowe o strukturze i wartości parametrów elementów jak na rys. 3.48. Wykazać, że transmitancja napięciowa każdego z nich jest taka sama.

ROZWIĄZANIE. Transmitancja napięciowa filtru z rys. 3.48a ma postać

$$T_1(s) = \frac{1}{s^2 L C_2 + 1}$$

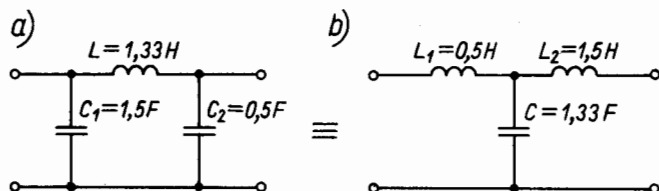
z rys. 3.48b zaś — postać

$$T_2(s) = \frac{1}{s^2 L_1 C + 1}$$

Jeśli jest spełniony warunek

$$L C_2 = L_1 C$$

to obydwie transmitancje mają identyczną postać. Dla danych jak w zadaniu warunek ten jest spełniony.



Rys. 3.48

3.58. Wyznaczyć transmitancję napięciową w postaci operatorowej filtru reaktancyjnego górnoprzepustowego typu Π (rys. 3.49a), jeśli jest on zasilany z idealnego źródła napięcia. Rozpatrzyć trzy przypadki:

- 1) filtr nie jest obciążony na wyjściu,
- 2) filtr jest obciążony impedancją charakterystyczną,
- 3) filtr jest obciążony impedancją różną od charakterystycznej.

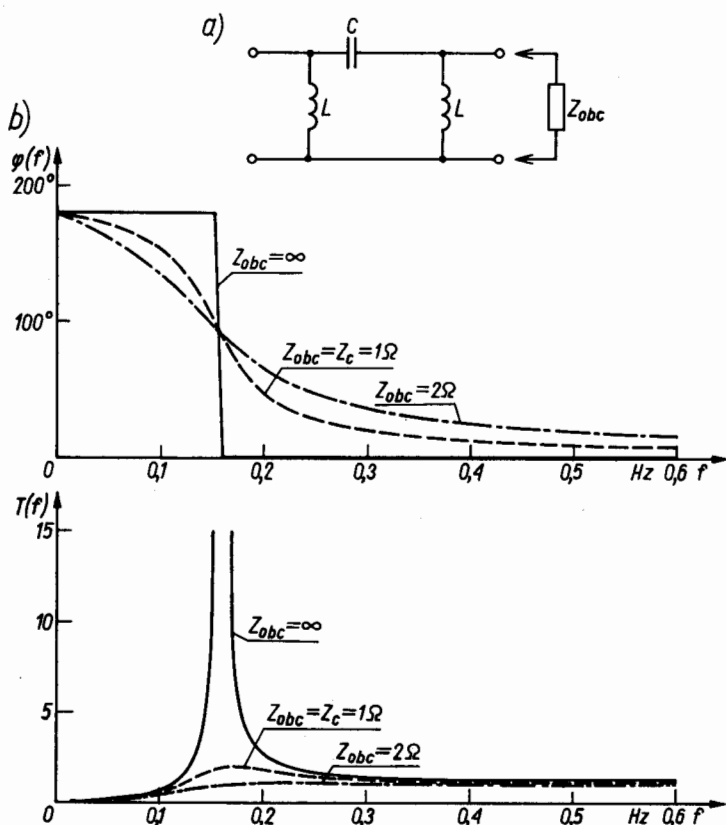
Narysować przebiegi modułu i argumentu transmitancji dla wszystkich analizowanych przypadków. Przyjąć, że $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$.

ROZWIĄZANIE

- 1) Transmitancja napięciowa filtru nieobciążonego

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{A} = \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2}$$

przy czym $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.



Rys. 3.49

2) Obciążenie filtru impedancją charakterystyczną powoduje, że prąd $I_2 \neq 0$. Zatem transmitancja napięciowa nie wyraża się zależnością $T(s) = 1/A$, lecz zależnością

$$T(s) = \frac{Z_z}{\frac{1}{sC} + Z_z} = \frac{Z_z sC}{1 + Z_z sC}$$

gdzie $Z_z = \frac{Z_c sL}{Z_c + sL}$ jest impedancją zastępczą cewki i dołączonej do niej równolegle impedancji obciążenia, równej impedancji charakterystycznej

$$Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{s^2}{2s^2 + \omega_0^2}}$$

Jeśli uwzględnić pierwsze z powyższych wyrażeń, to transmitancja

$$T(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{Z_c C} s + \omega_0^2} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

Stąd dobroć układu (filtr-obciążenie)

$$Q = C\omega_0 Z_c$$

Impedancja charakterystyczna dla sygnałów sinusoidalnie zmiennych w funkcji czasu jest w ogólności wielkością zespoloną i zmieniającą się w sposób złożony w funkcji częstotliwości. Zatem i dobroć układu w pewnych zakresach częstotliwości mogłaby być wielkością zespoloną i zmieniającą się w funkcji częstotliwości, przy czym dobroć zespolona to w istocie zmiana rzędu analizowanego układu. Synteza odbiornika, którego impedancja byłaby równa impedancji charakterystycznej jest trudna i w praktyce niepotrzebna. Pojęcie impedancji charakterystycznej w odniesieniu do filtrów może mieć pewne znaczenie przy określaniu parametrów układu wówczas, gdy sygnał przenoszony przez filtr ma stałą częstotliwość. Na przykład, jeśli pulsacja sygnału przenoszonego przez filtr $\omega = \omega_0$ i przy pulsacji tej obciążenie filtru jest równe impedancji charakterystycznej, to impedancja obciążenia

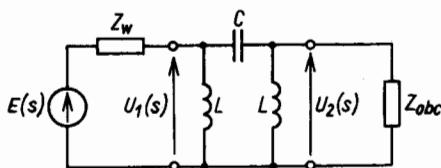
$$\underline{Z}_{\text{obc}}(j\omega) = \underline{Z}_c(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1 \Omega$$

Przy takim obciążeniu dobroć układu filtrującego $Q = 1$.

3) Obciążenie filtru określoną impedancją — często zdeterminowaną względami natury technicznej lub funkcjonalnej, np. przez układy współpracujące z filtrem — powoduje przede wszystkim zmianę dobroci układu filtr-obciążenie i tym samym zmianę jego charakterystyk częstotliwościowych i dynamicznych. Przykładowo zakładając, że $\underline{Z}_{\text{obc}}(j\omega) = 2 \Omega$, otrzymujemy dobroć układu

$Q = \omega_0 C Z_{\text{obc}} = 2$. Na rysunku 3.49b są pokazane odpowiednio przebiegi modułu $[T(f)]$ i argumentu $[\arg \varphi(f)]$ transmitancji badanego układu dla wszystkich trzech obciążeń.

3.59. Wyznaczyć transmitancję filtra górnoprzepustowego o strukturze jak na rys. 3.50, zasilanego z rzeczywistego źródła napięcia o impedancji wewnętrznej Z_w . Rozpatrzyć przypadek, gdy transmitancja $T_1(s) = U_2(s)/E(s)$ oraz $T_2(s) = U_2(s)/U_1(s)$.



Rys. 3.50

Odpowiedź

$$T_1(s) = \frac{U_2(s)}{E(s)} \Big|_{I_2 \neq 0} = \frac{Z_{\text{obc}} L^2 C s^3}{(Z_{\text{obc}} L^2 C + Z_w L^2 C) s^3 + (2 Z_w Z_{\text{obc}} L C + L^2) s^2 + (Z_w L + Z_{\text{obc}} L) s + Z_w Z_{\text{obc}}}$$

$$T_2(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2 \neq 0} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{C Z_{\text{obc}}} s + \omega_0^2} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

przy czym $Q = \omega_0 C Z_{\text{obc}}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

3.60. Wyznaczyć transmitancję $T_1(s) = U_2(s)/I_z(s)$ i transmitancję $T_2(s) = U_2(s)/U_1(s)$ filtra górnoprzepustowego o strukturze jak na rys. 3.50 ($Z_w = 0$) zasilanego z idealnego źródła prądu o prądzie źródłowym $I_z(s)$. Przyjąć, że filtr jest obciążony impedancją Z_{obc} .

Odpowiedź

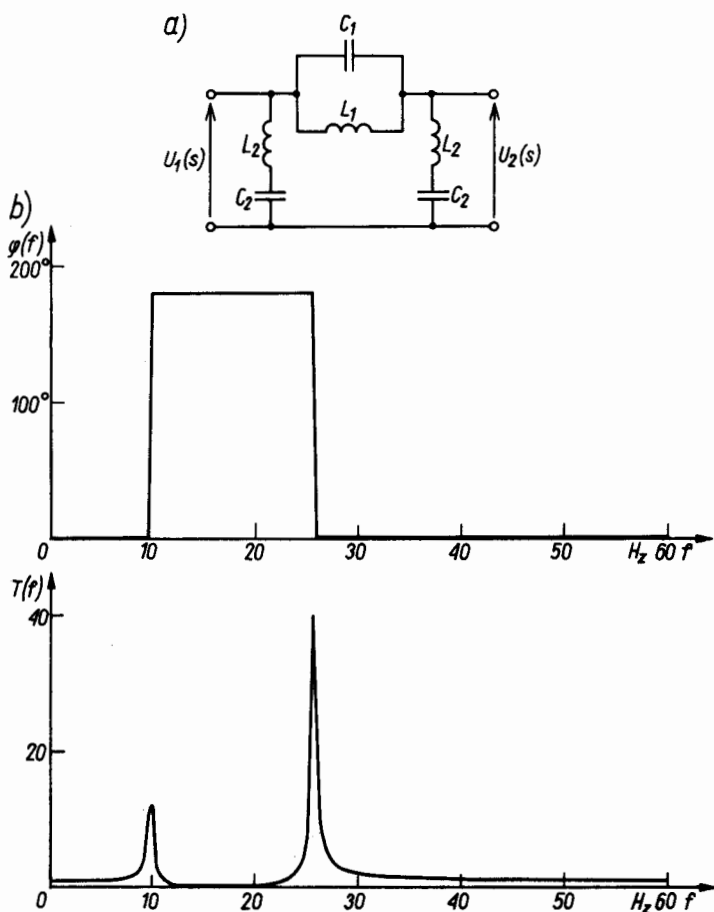
$$T_2(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2 \neq 0} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{C Z_{\text{obc}}} s + \omega_0^2} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

przy czym $Q = C \omega_0 Z_{\text{obc}}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Transmitancja ta jest identyczna jak w przypadku zasilania układu z idealnego źródła napięcia o napięciu $E(s) = U_1(s)$ (patrz zadanie 3.59)

$$T_1(s) = \frac{U_2(s)}{I_2(s)} \Big|_{I_2 \neq 0} = \frac{Z_{\text{obc}} L^2 C s^3}{L^2 C s^3 + 2Z_{\text{obc}} L C s^2 + L s + Z_{\text{obc}}}$$

3.61. Określić transmitancję napięciową filtra zaporowego o strukturze przedstawionej na rys. 3.51a. Wyznaczyć przebieg modułu i argumentu transmitancji w funkcji częstotliwości. Obliczenia wykonać dla następujących danych: $C_1 = C_2 = 0,01 \text{ F}$; $L_1 = L_2 = 0,01 \text{ H}$.



Rys. 3.51

ROZWIĄZANIE. Transmitancja operatorowa filtru, gdy prąd $I_2 = 0$, ma postać wyrażenia

$$T(s) = \frac{s^4 + (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)s^2 + \omega_{01}^2\omega_{02}^2}{s^4 + (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)s^2 + \omega_{01}^2\omega_{02}^2 + \frac{\omega_{02}^2}{C_1^2}}$$

w którym: $\omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$; $\omega_{02}^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$.

Przebieg modułu i argumentu transmitancji jest pokazany na rys. 3.51b.

3.62. Transmitancja filtru dolnoprzepustowego przedstawionego na rys. 3.47a (patrz zadanie 3.56) ma postać

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Dobrać elementy układu w taki sposób, aby $\omega_0 = 1$ rad/s i $Q = 1/\sqrt{2}$. Następnie stosując zasady denormalizacji, dobrać tak wartości parametrów elementów, by przy takiej samej dobroci $\omega_{01} = 1000$ rad/s.

ROZWIĄZANIE. Formę transmitancji przedstawioną w zadaniu nazywamy unormowaną. Jeśli ponadto pulsacja graniczna (charakterystyczna) ω_0 przyjmuje wartości bliskie jedności lub równe jeden, to również wartości parametrów elementów (rezystorów, cewek i kondensatorów) są bliskie jedności. Mówimy w takim przypadku o *parametrach znormalizowanych* (unormowanych) albo o filtrach znormalizowanych. Posługiwanie się znormalizowanymi wielkościami ma tę zaletę, że przy badaniu podstawowych właściwości układu nie stosujemy elementów o wartościach parametrów bardzo małych (np. pojemność kondensatorów rzędu 10^{-6} F) lub bardzo dużych (np. rezystancja rzędu $10^4 \Omega$). W układach liniowych możliwe jest dokonanie tzw. *denormalizacji*, która sprowadza się do zmiany parametrów filtru znormalizowanego w taki sposób, by uzyskać filtr o innej, zazwyczaj znacznie większej częstotliwości granicznej. Denormalizację przeprowadzamy przyjmując jako wielkości odniesienia pulsację graniczną i impedancję elementów określone dla filtru znormalizowanego. Po założeniu więc, że dla pulsacji znormalizowanej ω_N impedancje elementów są znormalizowane i oznaczane indeksem N np. Z_N , wprowadzamy dwa współczynniki denormalizacji:

- współczynnik częstotliwości (pulsacji) $k_f = f/f_N = \omega/\omega_N$;
- współczynnik impedancji $k_R = Z/Z_N$.

Wartość tych współczynników ustalamy zależnie od stawianego sobie celu, np. zmiany częstotliwości granicznej, przy jednoczesnej zmianie wartości parametrów elementów na wartości możliwe do realizacji technicznej. Ponieważ impedancje elementów pasywnych zależą od częstotliwości (pulsacji), więc impedancje zdenormalizowane są zależne od obu współczynników. Analizując współczynnik impedancji dla różnych elementów stwierdzamy, że:

- rezystancja (konduktancja) zdenormalizowana $R = k_R R_N \left(G = \frac{1}{k_R} G_N \right)$;
- indukcyjność zdenormalizowana $L = \frac{k_R}{k_f} L_N$, gdyż $\omega L = k_R \omega_N L_N$;
- pojemność zdenormalizowana $C = \frac{1}{k_R k_f} C_N$, gdyż $\frac{1}{\omega C} = k_R \frac{1}{\omega_N C_N}$.

Dla danych określonych w zadaniu, przy założeniu, że $\omega_0 = \omega_N$ z zależności

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad Q = \frac{C\omega_0}{G}$$

wyznaczamy równania

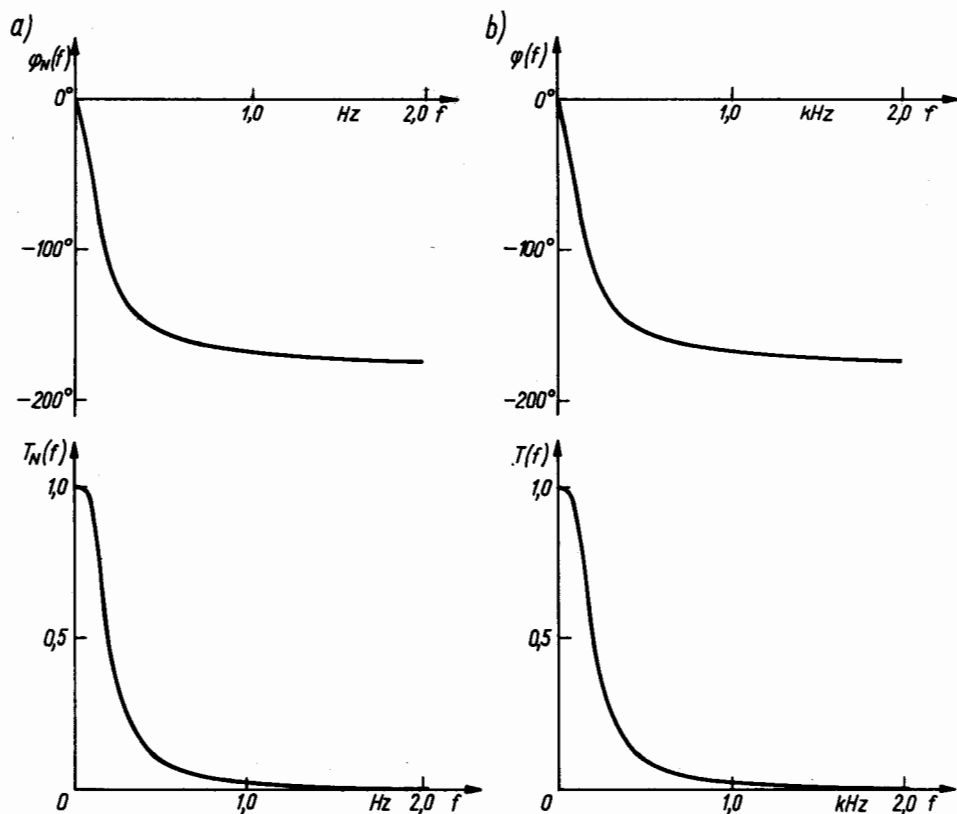
$$1 = \frac{1}{L_N C_N}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = R_N C_N$$

z których po założeniu np., że $R_N = 1 \Omega$, obliczamy

$$C_N = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad L_N = \sqrt{2}$$

Parametry elementów dla pulsacji granicznej $\omega_{01} = \omega = 1000 \text{ rad/s}$ obliczamy po ustaleniu wartości współczynników denormalizacji, np. $k_R = 100$, $k_f = \frac{1000}{1} = 1000$. Stąd: $R = 100 R_N = 100 \Omega$, $L = \frac{100}{1000} L_N = 0,141 \text{ H}$, $C = \frac{1}{100000} C_N = 7,07 \mu\text{F}$.

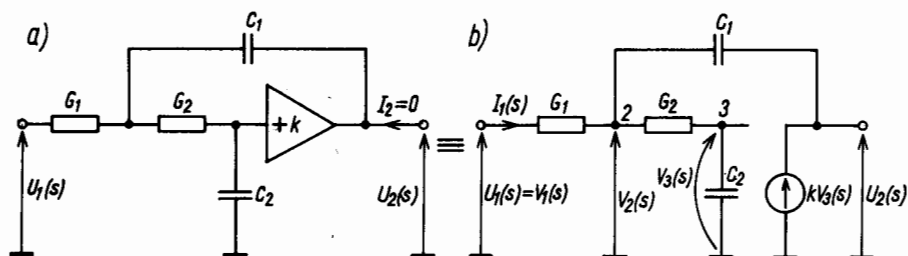
Na rysunku 3.52a, b przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe dla obu filtrów.



Rys. 3.52

3.3.2. Filtry aktywne

3.63. Dany jest filtr o strukturze pokazanej na rys. 3.53a. Wyznaczyć jego transmitancję napięciową (przy $I_2 = 0$), określić rodzaj realizowanego filtra (dolno-, górno- czy środkowoprzepustowy) oraz sformułować zależności umożliwiające projektowanie przy założeniu, że pulsacja graniczna $\omega_0 = \omega_N = 1$ rad/s.



Rys. 3.53

ROZWIĄZANIE. Transmitancję filtru wyznaczamy przekształcając go do postaci równoważnej pokazanej na rys. 3.53b i stosując metodę potencjałów węzłowych. Z metody tej wynika równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + sC_1 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ sC_1 k V_3(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

które po uporządkowaniu przekształca się do postaci

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + sC_1 & -(G_2 + sC_1 k) \\ 0 & -G_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transmitancja napięciowa badanego układu

$$T(s) = \frac{k V_3(s)}{U_1(s)} = \frac{k \Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{\frac{k G_1 G_2}{C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{(1-k) G_2}{C_2} \right) s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}$$

przy czym Δ_{11} i Δ_{13} — podwyznaczniki otrzymane z wyznacznika głównego macierzy admitancyjnej przez, odpowiednio, skreślenie pierwszego wiersza i pierwszej kolumny oraz pierwszego wiersza i trzeciej kolumny.

Ogólna postać wyprowadzonej wyżej transmitancji wskazuje, że badany układ jest filtrem dolnoprzepustowym. Jeśli chcemy przejść do postaci znormalizowanej

$$T(s) = \frac{A}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \bigg|_{\omega_0 = \omega_N = 1} = \frac{A}{s^2 + \frac{1}{Q} s + 1}$$

musimy założyć, że współczynnik wzmocnienia

$$A = \frac{k G_1 G_2}{C_1 C_2}$$

zaś odwrotność współczynnika dobroci

$$\frac{1}{Q} = \frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{(1-k) G_2}{C_2}$$

Ponadto musi być spełniony warunek

$$\frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} = \omega_0^2 = \omega_N^2 = 1$$

Ostatnie trzy zależności wraz z algorytmem denormalizacji parametrów (patrz zadanie 3.62) określają podstawowe równania umożliwiające projektowanie filtru o strukturze przedstawionej na rys. 3.53a. Należy podkreślić, że liczba niewiadomych projektowych jest większa od liczby otrzymanych równań. Stąd też podczas projektowania należy założyć wartości dwóch spośród pięciu niewiadomych. Przy wnikliwej analizie badanego filtru, np. przeprowadzonej dodatkowo analizie wrażliwościowej, można uzyskać nowe zależności ułatwiające przyjmowanie wstępnych danych do projektowania.

3.64. Korzystając z wyprowadzonych w zadaniu 3.63 wyrażeń określających parametry znormalizowanej transmitancji filtru dolnoprzepustowego, zaprojektować filtr o pulsacji granicznej $\omega_0 = 1$ rad/s, dobroci $Q = 2$ i wzmocnieniu $A = 10$.

ROZWIĄZANIE. Uwzględniając oczekiwane parametry filtru, otrzymujemy układ trzech równań

$$\begin{aligned}\frac{k G_1 G_2}{C_1 C_2} &= 10 \\ \frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{(1 - k) G_2}{C_2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} &= 1\end{aligned}$$

W celu rozwiązania układu należy założyć wartości dwóch z pięciu nieznanych parametrów. Przyjmijmy np. $C_1 = C_2 = 1$ F. Założenie takie powoduje, że otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}k G_1 G_2 &= 10 \\ G_1 + (2 - k) G_2 &= 0,5 \\ G_1 G_2 &= 1\end{aligned}$$

z którego wyznaczamy $k = 10$ oraz dodatnie konduktancje $G_1 = 3,08$ S, $G_2 = 0,32$ S. Obliczone wartości parametrów elementów filtru są jednymi z wielu możliwych. Przyjmując za znane zarówno inne wartości parametrów, jak i inne niż w zadaniu parametry elementów, otrzymamy nowe wartości pozostałych parametrów.

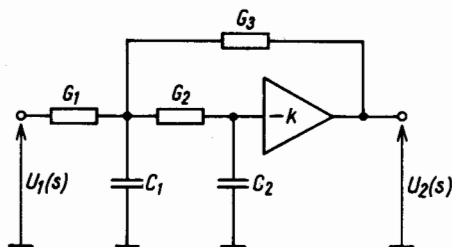
3.65. Stosując zasady denormalizacji parametrów filtru, wyznaczyć ich wartości dla filtru z rys. 3.53a, jeśli żądamy, by jego pulsacja graniczna wynosiła $\omega = \omega_0 = 10^4$ rad/s.

ROZWIĄZANIE. W celu dokonania denormalizacji parametrów filtru ustalamy wartość współczynnika $k_f = \omega/\omega_N = 10^4$ oraz przyjmujemy, że $k_R = 5 \cdot 10^3$. Następnie wykorzystując zależności przedstawione w zadaniu 3.62, wyznaczamy wartości rezystancji rezystorów i pojemności kondensatorów,

przy czym wartości parametrów elementów filtru obliczone w zadaniu 3.64 uważamy za parametry znormalizowane. Wykonując obliczenia, otrzymujemy następujące wartości:

- rezystancje zdenormalizowane $R_1 = k_R \frac{1}{G_{1N}} = 1,62 \cdot 10^3 \Omega$; $R_2 = 15,6 \cdot 10^3 \Omega$;
- pojemności zdenormalizowane $C_1 = \frac{1}{k_R k_f} C_{1N} = 20 \text{ nF} = C_2$.

3.66. Wyznaczyć transmitancję napięciową w postaci operatorowej filtru o strukturze pokazanej na rys. 3.54, w której zastosowano wzmacniacz napięcia sterowany z ujemnego wejścia. Określić parametry filtru znormalizowanego.



Rys. 3.54

Odpowiedź

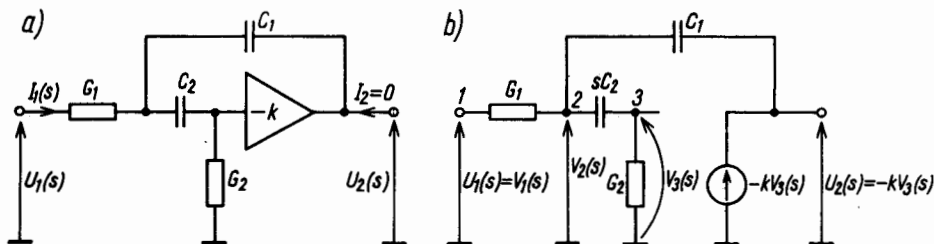
$$T(s) = \frac{-\frac{k G_1 G_2}{C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_1} + \frac{G_2}{C_2} \right) s + \frac{G_2(G_1 + G_3 + k G_2)}{C_1 C_2}}$$

$$A = \frac{k G_1 G_2}{C_1 C_2}; \quad \omega_0^2 = \frac{G_2(G_1 + G_3 + k G_2)}{C_1 C_2}; \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_1} + \frac{G_2}{C_2}$$

3.67. Wyznaczyć parametry elementów układu z rys. 3.54 realizujących filtr, w którym: $\omega_0 = \omega_N = 2 \text{ rad/s}$, $Q = 1$, $A = 2$. Przyjąć takie założenia projektowe, aby wszystkie elementy pasywne były dodatnie.

Odpowiedź. Przy założeniu np. $G_1 = G_2 = G_3 = 1 \text{ S}$, otrzymujemy: $k = 2/3$, $C_1 = 1/15 \text{ F}$, $C_2 = 5 \text{ F}$.

3.68. Układ z rysunku 3.55a jest filtrem środkowoprzepustowym. Stosując metodę potencjałów węzłowych, wyznaczyć jego transmitancję napięciową w postaci operatorowej oraz zaproponować wartości parametrów elementów realizujących transmitancję znormalizowaną (dla $\omega_0 = \omega_N = 1$).



Rys. 3.55

ROZWIĄZANIE. Schemat obwodowy równoważny analizowanemu układowi jest przedstawiony na rys. 3.55b. Wykorzystując oznaczenia potencjałów i węzłów pokazane na rysunku, układamy równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + sC_1 + sC_2 & -sC_2 \\ 0 & -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ -sC_1 k V_3(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

które po uporządkowaniu przekształca się do postaci

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + sC_1 + sC_2 & -s(C_2 - C_1 k) \\ 0 & -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transmitancja napięciowa badanego układu

$$\begin{aligned} T(s) &= -\frac{k V_3(s)}{U_1(s)} = -\frac{k \Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \\ &= \frac{-\frac{k G_1}{C_1(1+k)} s}{s^2 + \left[\frac{(C_1 + C_2) G_2}{C_1 C_2(1+k)} + \frac{G_1}{C_1(1+k)} \right] s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2(1+k)}} \end{aligned}$$

przy czym Δ_{11} i Δ_{13} — podwyznaczniki otrzymane z wyznacznika głównego macierzy admitycyjnej przez odpowiednio skreślenie pierwszego wiersza i pierwszej kolumny oraz pierwszego wiersza i trzeciej kolumny. Równania określające transmitancję znormalizowaną mają postać

$$\begin{aligned} \omega_0^2 = \omega_N^2 = 1 &= \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2(1+k)} \\ \frac{1}{Q} &= \frac{(C_1 + C_2) G_2}{C_1 C_2(1+k)} + \frac{G_1}{C_1(1+k)} \\ A &= \frac{k G_1}{C_1(1+k)} \end{aligned}$$

zaś transmitancja znormalizowana

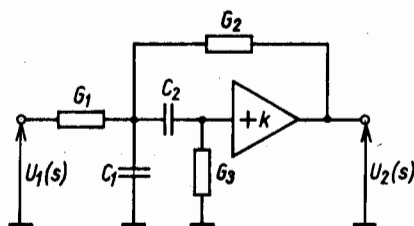
$$T(s) = - \frac{As}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \bigg|_{\omega_0 = \omega_N = 1} = - \frac{As}{s^2 + \frac{1}{Q}s + 1}$$

Po założeniu np. $G_1 = G_2 = 1 \text{ S}$, $C_1 = C_2 = \frac{1}{3} \text{ Q}$, otrzymujemy współczynnik wzmocnienia $k = 9Q^2 - 1$.

3.69. Wykorzystując wyniki rozważań odnoszących się do rozwiązania zadania 3.68 oraz stosując zasady denormalizacji, dobrać parametry elementów filtru z rys. 3.55a w taki sposób by przy dobroci $Q = 4$ jego pulsacja graniczna $\omega_0 = 10^5 \text{ rad/s}$.

Odpowiedź. Zakładając np. $k_R = 5 \cdot 10^4$ przy $k_f = 10^5$, obliczamy: $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 16 \text{ pF}$, $k = 143$.

3.70. Wyznaczyć transmitancję napięciową w postaci operatorowej filtru środkowoprzepustowego o strukturze jak na rys. 3.56 oraz jego parametry: dobroć i częstotliwość graniczną, jeśli $G_1 = G_2 = 1 \text{ S}$, $G_3 = 0,5 \text{ S}$, $C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$, $k = 2$.

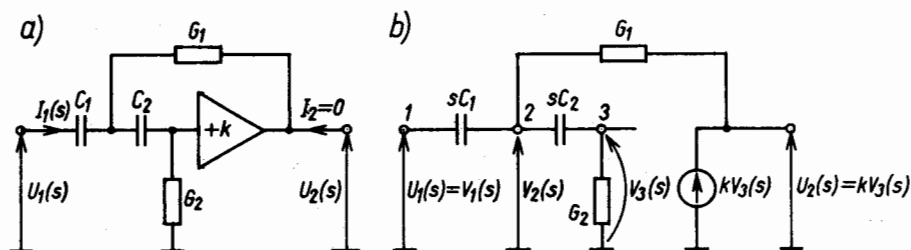


Rys. 3.56

Odpowiedź

$$T(s) = \frac{\frac{kG_1}{C_1}s}{s^2 + \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3 - kG_2}{C_1} + \frac{G_2}{C_2} \right)s + \frac{G_3(G_1 + G_2)}{C_1 C_2}}; Q = 1; \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

3.71. Układ przedstawiony na rys. 3.57a jest filtrem górnoprzepustowym. Wyznaczyć jego transmitancję napięciową w postaci znormalizowanej.



Rys. 3.57

ROZWIĄZANIE. Stosując metodę potencjałów węzłowych do analizy układu równoważnego pokazanego na rys. 3.57b, układamy równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} sC_1 & -sC_1 & 0 \\ -sC_1 & G_1 + sC_1 + sC_2 & -sC_2 \\ 0 & -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ G_1 k V_3(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

które po uporządkowaniu przekształca się do postaci

$$\begin{bmatrix} sC_1 & -sC_1 & 0 \\ -sC_1 & G_1 + sC_1 + sC_2 & -(sC_2 + kG_1) \\ 0 & -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transmitancja napięciowa badanego układu

$$T(s) = \frac{k V_3(s)}{U_1(s)} = \frac{k \Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{ks^2}{s^2 + \left[\frac{(C_1 + C_2) G_2}{C_1 C_2} + \frac{(1 - k) G_1}{C_1} \right] s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}$$

przy czym Δ_{11} i Δ_{13} — podwyznaczniki otrzymane z wyznacznika głównego macierzy admityncyjnej przez, odpowiednio, skreślenie pierwszego wiersza i pierwszej kolumny oraz pierwszego wiersza i trzeciej kolumny. Równania określające transmitancję znormalizowaną mają postać

$$\omega_0^2 = \omega_N^2 = 1 = \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{(C_1 + C_2) G_2}{C_1 C_2} + \frac{(1 - k) G_1}{C_1}$$

$$A = k$$

zaś transmitancja znormalizowana

$$T(s) = \frac{As^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \bigg|_{\omega_0=\omega_N=1} = \frac{ks^2}{s^2 + \frac{1}{Q}s + 1}$$

3.72. Zaprojektować filtr górnoprzepustowy o strukturze pokazanej na rys. 3.57a. Dobrać parametry elementów w taki sposób, by zrealizować filtr o dobroci $Q = 1/\sqrt{2}$, pulsacji granicznej $\omega_0 = 1000$ rad/s i wzmacnieniu $k = 1$.

ROZWIĄZANIE. Obliczenia projektowe dla założonych parametrów jest dogodnie wykonać mając wyznaczone parametry elementów dla filtra znormalizowanego i następnie wykorzystać procedury denormalizacji. Przyjmijmy więc, że określamy parametry elementów filtra o dobroci $Q = 1/\sqrt{2}$ i pulsacji granicznej $\omega_0 = \omega_N = 1$ rad/s. W takim przypadku równania umożliwiające projektowanie upraszczają się do postaci

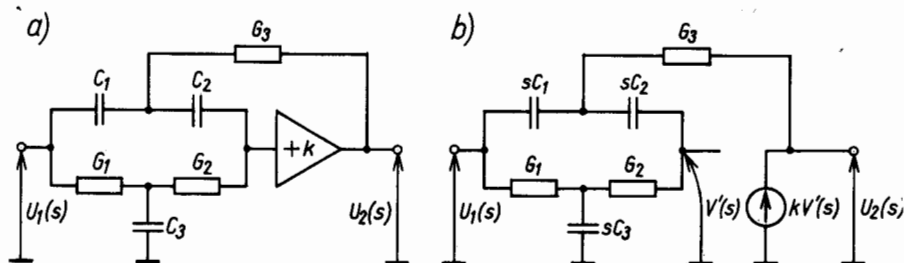
$$1 = \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}; \quad \sqrt{2} = \frac{(C_1 + C_2) G_2}{C_1 C_2} + \frac{(1 - k) G_1}{C_1}; \quad A = 100$$

Jeśli przykładowo założymy, że $C_1 = C_2 = 1$ F, to wyznaczymy $G_1 = 2/\sqrt{2}$ S, $G_2 = \sqrt{2}/2$ S.

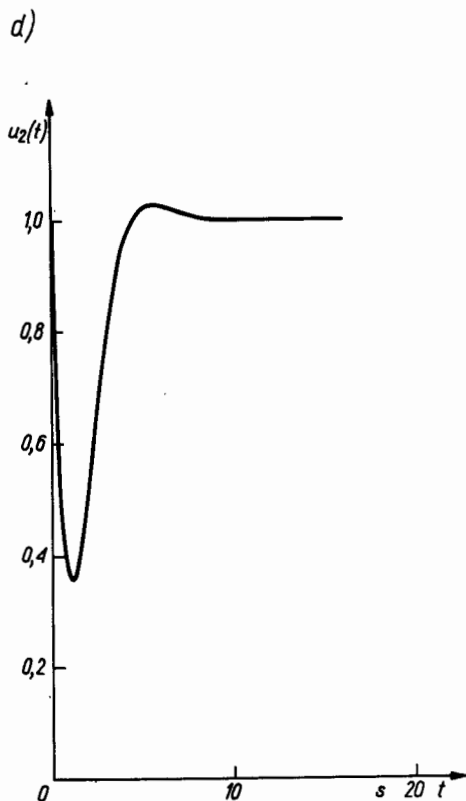
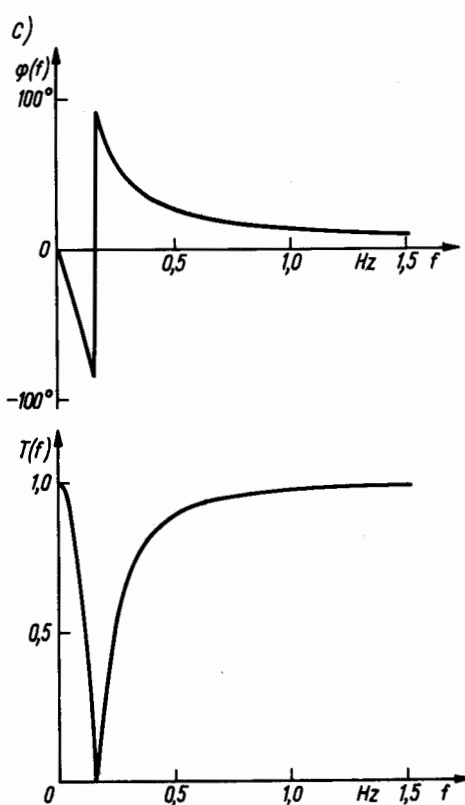
Parametry elementów żadanego filtra obliczamy zakładając np., że $k_R = 10^3$ i uwzględniając, że $k_f = 10^3$. W rezultacie otrzymamy

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ k}\Omega; \quad R_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ k}\Omega; \quad C_1 = C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

3.73. Dany jest układ aktywny pokazany na rys. 3.58a. Wyznaczyć jego transmitancję napięciową w postaci znormalizowanej oraz narysować przebieg jej modułu i argumentu w funkcji częstotliwości. Ponadto wyznaczyć odpowiedź układu na skok jednostkowy napięcia na wejściu. Założyć, że $C_3 = C_1 + C_2$; $G_3 = G_1 + G_2$. Obliczenia wykonać przy $Q = 1/\sqrt{2}$.



Rys. 3.58a,b



Rys. 3.58c,d

ROZWIĄZANIE. Po zastosowaniu metody potencjałów węzłowych do równoważnego układu, pokazanego na rys. 3.58b, określamy transmitancję (patrz np. zadanie 3.71)

$$T(s) = \frac{k \left(s^2 + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} \right)}{s^2 + \left[\frac{C_2 (G_1 + G_2) (1 - k) + G_2 (C_1 + C_2)}{C_1 C_2} \right] s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}$$

Przyjmując

$$\omega_0^2 = \omega_N^2 = 1 = \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}$$

oraz zakładając np., że $C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$, $C_3 = 2 \text{ F}$, $k = 1$, wyznaczamy

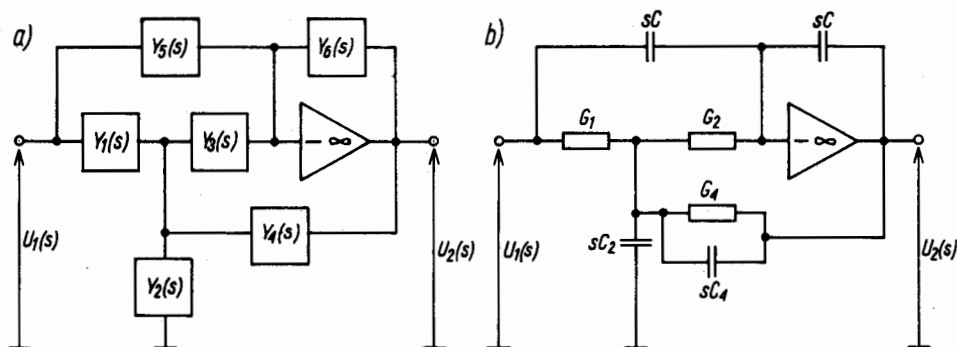
$$G_1 = 2Q; \quad G_2 = 1/2Q$$

Na rysunku 3.58c są pokazane charakterystyki częstotliwościowe transmitancji, na rys. 3.58d — odpowiedź układu na skok jednostkowy [napięcie $u_2(t)$]. Charakterystyki częstotliwościowe wskazują, że badany układ jest filtrem środkowozaporowym.

3.74. Dobrać tak elementy układu pokazanego na rys. 3.59a, by zrealizować filtr o transmitancji napięciowej

$$T(s) = - \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 2}$$

Założyć, że elementem aktywnym jest idealny wzmacniacz operacyjny.



Rys. 3.59

ROZWIĄZANIE. Stosując metodę potencjałów węzłowych, wyznaczamy potencjały węzłów 1 i 2, a następnie transmitancję napięciową

$$T(s) = - \frac{Y_3(s) Y_1(s) + Y_6(s) [Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + Y_4(s)]}{Y_3(s) Y_4(s) + Y_5(s) [Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + Y_4(s)]}$$

Żadaną postać transmitancji otrzymamy, jeśli przyjmiemy, że

$$Y_1(s) = G_1; \quad Y_2(s) = sC_2; \quad Y_3(s) = G_3$$

$$Y_4(s) = sC_4 + G_4; \quad Y_5(s) = Y_6(s) = sC$$

Istotnie, podstawiając powyższe admitancje do wyrażenia określającego transmitancję, otrzymujemy

$$T(s) = - \frac{C(C_2 + C_4)s^2 + C(G_1 + G_3 + G_4)s + G_1 G_3}{C(C_2 + C_4)s^2 + [G_3 C_4 + C(G_1 + G_3 + G_4)]s + G_3 G_4}$$

Przyrównując współczynniki przy s w odpowiedniej potęgze obu transmitancji, określamy układ równań o postaci

$$1 = C(C_2 + C_4)$$

$$1 = C(G_1 + G_3 + G_4)$$

$$1 = G_1 G_3$$

$$2 = G_3 C_4 + C(G_1 + G_3 + G_4)$$

$$2 = G_3 G_4$$

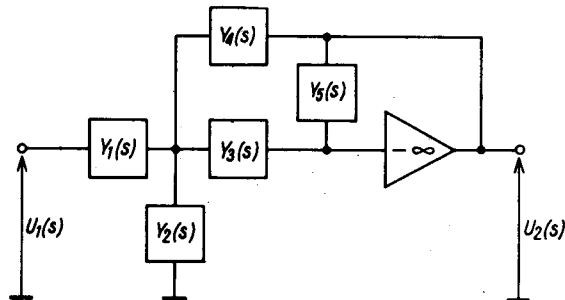
Zakładając np. $C = 0,25 \text{ F}$, z powyższych równań wyznaczamy: $G_1 = 1 \text{ S}$, $G_3 = 1 \text{ S}$, $G_4 = 2 \text{ S}$, $C_4 = 1 \text{ F}$, $C_2 = 3 \text{ F}$.

Na rysunku 3.59b przedstawiono układ realizujący pożądaną transmitancję.

3.75. Dobrać tak elementy układu pokazanego na rys. 3.60, by zrealizować filtr o transmitancji napięciowej

$$T(s) = -\frac{1}{s^2 + 3s + 3}$$

Założyć, że elementem aktywnym jest idealny wzmacniacz operacyjny.



Rys. 3.60

Odpowiedź. Transmitancja napięciowa układu ma postać

$$T(s) = -\frac{Y_3(s) Y_1(s)}{Y_3(s) Y_4(s) + Y_5(s) [Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + Y_4(s)]}$$

Parametry elementów mogą mieć np. wartości: $Y_1(s) = G_1 = 1 \text{ S}$; $Y_2(s) = sC_2$; $C_2 = 2 \text{ F}$; $Y_3(s) = G_3 = 2 \text{ S}$; $Y_4(s) = G_4 = 3 \text{ S}$; $Y_5(s) = sC_5$; $C_5 = 1 \text{ F}$.

3.76. Wykorzystując układ z rys. 3.60, dobrać strukturę dwójników $Y_1(s) \div Y_5(s)$, aby zrealizować transmitancję napięciową o postaci

$$T(s) = -\frac{2s}{s^2 + 2s + 4}$$

ROZWIĄZANIE. Dobierając następujące struktury admittancji:

$$Y_1(s) = sC_1; \quad Y_2(s) = sC_2; \quad Y_3(s) = G_3; \quad Y_4(s) = G_4; \quad Y_5(s) = sC_5$$

otrzymamy transmitancję układu w postaci wyrażenia

$$T(s) = \frac{G_3 C_1 s}{C_5 (C_1 + C_2) s^2 + C_5 (G_3 + G_4) s + G_3 G_4}$$

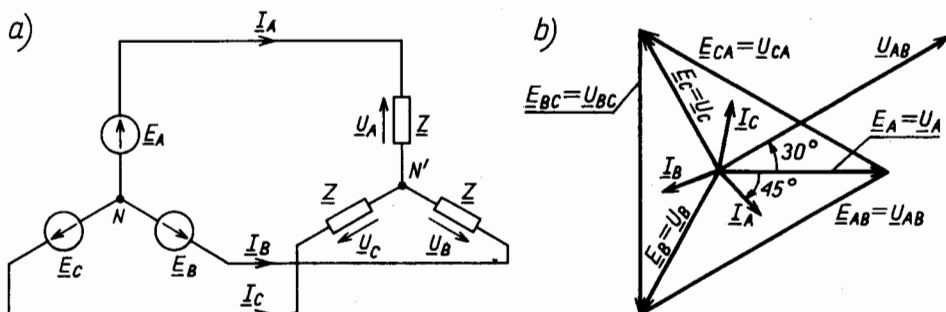
Przyrównując współczynniki i zakładając np., że $G_3 = G_4 = 2 \text{ S}$, otrzymujemy: $C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$, $C_5 = 0,5 \text{ F}$.

4

Obwody trójfazowe

4.1. Obwody trójfazowe symetryczne

4.1. Trójfazowe źródło zasilania, połączone w gwiazdę o napięciu fazy A , $e_A = 150 \sin \omega t$ V, zasila symetryczny odbiornik połączony w gwiazdę (rys. 4.1a). Impedancja każdej z faz odbiornika $\underline{Z} = (30 + j30) \Omega$. Obliczyć rozptyw prądów, rozkład napięć w obwodzie oraz moc czynną, bierną i pozorną odbiornika w układzie: a) trójprzewodowym, b) czteroprzewodowym przy impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 0$, c) czteroprzewodowym przy impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = (1 + j1) \Omega$. Dla poszczególnych przypadków narysować wykresy wektorowe.



Rys. 4.1

ROZWIĄZANIE. Różnica potencjałów między punktem neutralnym źródła N i odbiornika N'

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}\underline{E}_A + \underline{Y}\underline{E}_B + \underline{Y}\underline{E}_C}{3\underline{Y}} = \frac{\underline{Y}(\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3\underline{Y}} = \frac{\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C}{3} = 0$$

Napięcia fazowe symetrycznego źródła zasilania wynoszą

$$\underline{E}_A = \frac{150}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 75\sqrt{2} \text{ V}$$

$$\underline{E}_B = \frac{150}{\sqrt{2}} e^{-j120^\circ} = \frac{150}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (-37,5\sqrt{2} - j37,5\sqrt{6}) \text{ V}$$

$$\underline{E}_C = \frac{150}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ} = \frac{150}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (-37,5\sqrt{2} + j37,5\sqrt{6}) \text{ V}$$

Suma napięć fazowych symetrycznego źródła jest równa zeru

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0$$

a więc napięcie $\underline{U}_N = 0$. Stąd wniosek, że w rozpatrywanym układzie symetrycznym występowanie lub brak przewodu neutralnego nie ma wpływu na rozpyły prądów i rozkład napięć. W układzie czteroprzewodowym prąd w przewodzie neutralnym jest równy zeru zarówno przy $\underline{Z}_N = 0$, jak i przy $\underline{Z}_N \neq 0$, a punkty neutralne można ze sobą połączyć lub pozostawić rozwarte. Rozpyły prądów i rozkład napięć, a tym samym moce pobierane przez odbiornik, oraz wykres wektorowy — wyznaczone dla przypadku a) — pozostaną takie same dla przypadków b) i c).

Ponieważ w układzie symetrycznym gwiazda-gwiazda napięcie $\underline{U}_N = 0$, więc napięcia fazowe odbiornika są równe napięciom fazowym źródła zasilania

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A; \quad \underline{U}_B = \underline{E}_B; \quad \underline{U}_C = \underline{E}_C$$

Prądy fazowe wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{75\sqrt{2} e^{j0^\circ}}{30 + j30} = \frac{75\sqrt{2} e^{j0^\circ}}{30\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 2,5e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{75\sqrt{2} e^{-j120^\circ}}{30\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 2,5e^{-j165^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{75\sqrt{2} e^{j120^\circ}}{30\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 2,5e^{j75^\circ} \text{ A}$$

W układach symetrycznych zgodnych i przeciwnych napięcia i prądy poszczególnych faz są przesunięte o kąt fazowy 120° . W związku z tym, dla ułatwienia zapisu wprowadza się operator kątowny obrotu o kąt 120° i operator obrotu o kąt 240° , oznaczając je odpowiednio

$$a = e^{j120^\circ} = (\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = (\cos 240^\circ + j \sin 240^\circ) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wynika stąd, że

$$a^3 = a a^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad 1 + a + a^2 = 0$$

Zatem obliczone prądy faz B i C można zapisać w postaci

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_A; \quad \underline{I}_C = a \underline{I}_A$$

Suma geometryczna (wektorowa) prądów fazowych w symetrycznym układzie trójfazowym gwiazda-gwiazda jest zawsze równa zeru

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_A(1 + a^2 + a) = 0$$

Na rysunku 4.1b przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć.

Z równości modułów napięć źródłowych wynika równość modułów prądów

$$I_A = I_B = I_C = I_p = I_f = 2,5 \text{ A}$$

W układach symetrycznych prąd fazowy I_f jest równy prądowi przewodowemu I_p . Ze schematu (rys. 4.1a) oraz wykresu wektorowego (rys. 4.1b) wynika, że napięcie międzyfazowe (międzyprzewodowe) jest różnicą napięć fazowych

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A$$

$$\underline{U}_{AB} = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{BC} = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{CA} = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{j150^\circ} \text{ V}$$

Moduły napięć międzyfazowych są sobie równe

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 75\sqrt{6} \text{ V}$$

a suma ich wartości skutecznych zespolonych

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0$$

Moduł napięcia międzyfazowego U_p jest równy modułowi napięcia fazowego U_f pomnożonemu przez $\sqrt{3}$ (trójkąt utworzony z dwóch napięć fazowych i napięcia międzyfazowego jest trójkątem równoramiennym o kątach równych: $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$).

$$U_p = \sqrt{3} U_f = \sqrt{3} \cdot 75 \sqrt{2} = 75\sqrt{6} \text{ V}$$

Moc czynna pobierana przez jedną fazę odbiornika wynosi

$$P_1 = U_f I_f \cos \varphi = \frac{150}{\sqrt{2}} 2,5 \cos 45^\circ = 187,5 \text{ W}$$

$$P_1 = R I_f^2 = 30 (2,5)^2 = 187,5 \text{ W}$$

Przy symetrii układu moc czynna pobierana przez trzy fazy

$$P = 3 P_1 = 3 U_f I_f \cos \varphi = 3 R I_f^2 = 562,5 \text{ W}$$

Uwzględniając, że $I_p = I_f$ oraz $U_p = \sqrt{3} U_f$, otrzymujemy

$$P = \sqrt{3} U_p I_p \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 75 \sqrt{6} \cdot 2,5 \cos 45^\circ = 562,5 \text{ W}$$

Moc bierna pobierana przez trzy fazy

$$Q = 3 U_f I_f \sin \varphi = 3 \cdot 75 \sqrt{6} \cdot 2,5 \sin 45^\circ = 562,5 \text{ var}$$

$$Q = 3 X_L I_f^2 = 3 \cdot 30 \cdot (2,5)^2 = 562,5 \text{ var}$$

$$Q = \sqrt{3} U_p I_p \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 75 \sqrt{6} \cdot 2,5 \sin 45^\circ = 562,5 \text{ var}$$

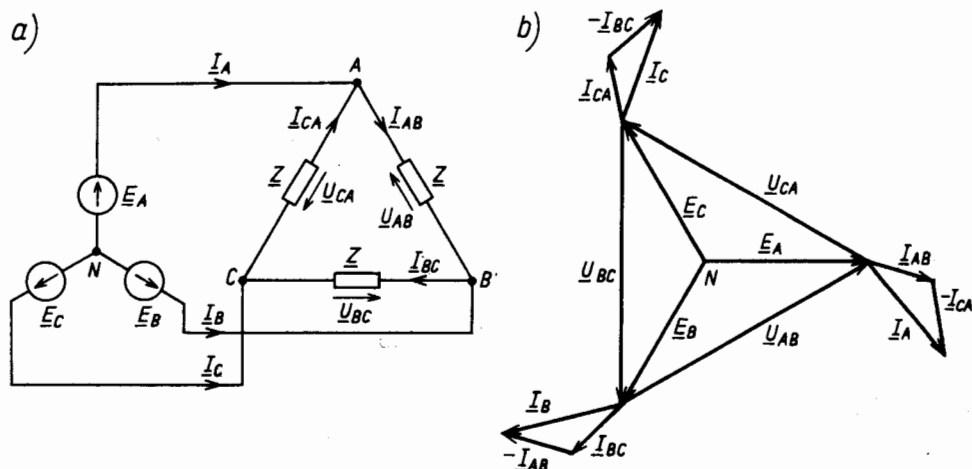
Moc pozorna odbiornika

$$S = 3 U_f I_f = 3 \cdot 75 \sqrt{2} \cdot 2,5 = 795,5 \text{ V} \cdot \text{A}$$

$$S = 3 Z I_f^2 = 3 \cdot 30 \sqrt{2} \cdot (2,5)^2 = 795,5 \text{ V} \cdot \text{A}$$

$$S = \sqrt{3} U_p I_p = \sqrt{3} \cdot 75 \sqrt{6} \cdot 2,5 = 795,5 \text{ V} \cdot \text{A}$$

4.2. Symetryczne źródło zasilania, połączone w gwiazdę o napięciu fazy A , $e_A = 150 \sin \omega t \text{ V}$, zasila symetryczny odbiornik połączony w trójkąt (rys. 4.2a). Impedancja każdej z faz $\underline{Z} = (30 + j30) \Omega$. Obliczyć rozptył prądów, rozkład napięć oraz moc czynną, bierną i pozorną pobieraną przez odbiornik.



Rys. 4.2

ROZWIĄZANIE. Przy pominięciu impedancji przewodów łączących źródło z odbiornikiem, napięcia fazowe odbiornika są równe napięciom międzyfazowym źródła zasilania

$$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_{AB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B = 75\sqrt{6}e^{j30^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{E}_{BC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = 75\sqrt{6}e^{-j90^\circ} = a^2 \underline{U}_{AB}$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{E}_{CA} = \underline{E}_C - \underline{E}_A = 75\sqrt{6}e^{j150^\circ} = a \underline{U}_{AB}$$

Identycznie jak w układzie gwiazdowym suma geometryczna napięć fazowych odbiornika jest równa zero

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0$$

Korzystając z prawa Ohma dla wartości skutecznych zespolonych, obliczamy prądy fazowe

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{75\sqrt{6}e^{j30^\circ}}{30\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 2,5\sqrt{3}e^{-j15^\circ} = (4,18 - j1,12) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{75\sqrt{6}e^{-j90^\circ}}{30\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 2,5\sqrt{3}e^{-j135^\circ} = (-3,06 - j3,06) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{75\sqrt{6}e^{j150^\circ}}{30\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 2,5\sqrt{3}e^{j105^\circ} = (-1,12 + j4,18) \text{ A}$$

czyli $\underline{I}_{BC} = a^2 \underline{I}_{AB}$; $\underline{I}_{CA} = a \underline{I}_{AB}$.

Suma prądów fazowych odbiornika połączonego w trójkąt

$$\underline{I}_{AB} + \underline{I}_{BC} + \underline{I}_{CA} = 0$$

Wartości skuteczne (moduły) prądów fazowych są sobie równe i wynoszą

$$I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = I_f = 2,5\sqrt{3} = 4,33 \text{ A}$$

Na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa, odpowiednio dla węzłów A, B, C obliczymy prądy przewodowe w zależności od prądów fazowych, a więc

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = (4,18 - j1,12 + 1,12 - j4,18) = 5,3 - j5,3 = 7,5e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = (-3,06 - j3,06 - 4,18 + j1,12) = -7,24 - j1,94 = \\ &= 7,5e^{-j165^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = (-1,12 + j4,18 + 3,06 + j3,06) = 1,94 + j7,24 = 7,5e^{j75^\circ} \text{ A}$$

zatem $\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_A$; $\underline{I}_C = a \underline{I}_A$.

Wartości skuteczne (moduły) prądów przewodowych są sobie równe i wynoszą

$$I_A = I_B = I_C = I_p = 7,5 \text{ A}$$

a suma ich wartości skutecznych zespolonych jest równa zero

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_A(1 + a^2 + a) = 0$$

Zarówno z obliczeń, jak i z wykresu wektorowego przedstawionego na rys. 4.2b (trójkąt utworzony z dwóch prądów fazowych i prądu przewodowego jest trójkątem równoramiennym o kątach równych 120° , 30° , 30°) wynika, że moduł prądu przewodowego I_p jest równy modułowi prądu fazowego I_f pomnożonemu przez $\sqrt{3}$

$$I_p = \sqrt{3} I_f = \sqrt{3} \cdot 2,5 \sqrt{3} = 7,5 \text{ A}$$

Moc czynna pobierana przez jedną fazę odbiornika wynosi

$$P_1 = U_f I_f \cos \varphi = 75 \sqrt{6} \cdot 2,5 \sqrt{3} \cos 45^\circ = 562,5 \text{ W}$$

$$P_1 = R I_f^2 = 30 (2,5 \sqrt{3})^2 = 562,5 \text{ W}$$

Przy symetrii układu moc czynną pobieraną przez trzy fazy można wyznaczyć z zależności

$$P = 3 P_1 = 3 U_f I_f \cos \varphi = 3 R I_f^2 = 1687,5 \text{ W}$$

lub uwzględniając, że $I_p = \sqrt{3} I_f$ oraz $U_p = U_f$, ze wzoru

$$P = \sqrt{3} U_p I_p \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 75 \sqrt{6} \cos 45^\circ = 1687,5 \text{ W}$$

Analogicznie, moc bierna pobierana przez odbiornik

$$Q = 3 U_f I_f \sin \varphi = 3 \cdot 75 \sqrt{6} \cdot 2,5 \sqrt{3} \sin 45^\circ = 1687,5 \text{ var}$$

$$Q = 3 X_L I_f^2 = 3 \cdot 30 \cdot (2,5 \sqrt{3})^2 = 1687,5 \text{ var}$$

$$Q = \sqrt{3} U_p I_p \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 75 \sqrt{6} \cdot 7,5 \sin 45^\circ = 1687,5 \text{ var}$$

Moc pozorna odbiornika

$$S = 3 U_f I_f = 3 \cdot 75 \sqrt{6} \cdot 2,5 \sqrt{3} = 2386,5 \text{ V} \cdot \text{A}$$

$$S = 3 Z I_f^2 = 3 \cdot 30 \sqrt{2} \cdot (2,5 \sqrt{3})^2 = 2386,5 \text{ V} \cdot \text{A}$$

$$S = \sqrt{3} U_p I_p = \sqrt{3} \cdot 75 \sqrt{6} \cdot 7,5 = 2386,5 \text{ V} \cdot \text{A}$$

Należy dodać, że moce: czynna, bierna i pozorna odbiornika połączonego w trójkąt są trzykrotnie większe od odpowiednich mocy odbiornika połączonego w gwiazdę, zawierającego te same impedancje $\underline{Z} = (30 + j30) \Omega$, dołączone do tego samego źródła napięcia.

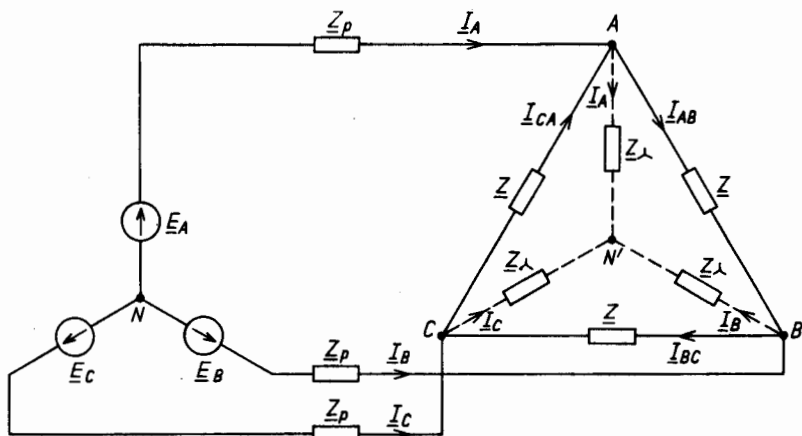
Porównując obliczone moce z wielkościami z zadania 4.1, otrzymamy

$$\frac{P_\Delta}{P_\lambda} = \frac{1687,5}{562,5} = 3$$

$$\frac{Q_\Delta}{Q_\lambda} = \frac{1687,5}{562,5} = 3$$

$$\frac{S_\Delta}{S_\lambda} = \frac{2386,5}{795,5} = 3$$

4.3. Do symetrycznego źródła napięcia, połączonego w gwiazdę o napięciu fazy A , $e_A = 220\sqrt{2} \sin \omega t$ V, przyłączono odbiornik symetryczny, połączony w trójkąt (rys. 4.3) o impedancji $\underline{Z} = (60 + j60) \Omega$. Obliczyć rozpływ prądów i rozkład napięć w układzie uwzględniając impedancje każdego z przewodów łączących źródło zasilania z odbiornikiem $\underline{Z}_p = (2 + j2) \Omega$.



Rys. 4.3

ROZWIĄZANIE. Napięcia fazowe źródła zasilania są wyrażone następująco:

$$\underline{E}_A = 220e^{j0^\circ} \text{ V}; \quad \underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A; \quad \underline{E}_C = a \underline{E}_A$$

a napięcia międzyfazowe (międzyprzewodowe)

$$\underline{E}_{AB} = 220\sqrt{3} e^{j30^\circ} \text{ V}; \quad \underline{E}_{BC} = a^2 \underline{E}_{AB}; \quad \underline{E}_{CA} = a \underline{E}_{AB}$$

Jeżeli w obliczeniach uwzględniamy impedancje przewodów łączących źródło z odbiornikiem połączonym w trójkąt, to napięcia międzyfazowe źródła nie są równe napięciom fazowym odbiornika (jak w przypadku, gdy $\underline{Z}_p = 0$). Aby obliczyć rozpływ prądów, należy przekształcić trójkąt w gwiazdę

$$\underline{Z}_{A\lambda} = \frac{\underline{Z}_{AB} \underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} = \frac{\underline{Z}^2}{3\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}}{3} = (20 + j20) \Omega$$

$$\underline{Z}_{A\lambda} = \underline{Z}_{B\lambda} = \underline{Z}_{C\lambda} = (20 + j20) \Omega$$

Otrzymujemy wówczas układ, w którym można obliczyć prądy przewodowe

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_{pA} + \underline{Z}_{A\lambda}} = \frac{220e^{j0^\circ}}{2 + j2 + 20 + j20} = \frac{220e^{j0^\circ}}{22\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 5\sqrt{2} e^{-j45^\circ} = (5 - j5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_{pB} + \underline{Z}_{B\lambda}} = 5\sqrt{2} e^{-j165^\circ} = a^2 \underline{I}_A$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_{pC} + \underline{Z}_{CA}} = 5\sqrt{2} e^{j75^\circ} = a \underline{I}_A$$

Napięcia fazowe odbiornika połączonego w gwiazdę

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_{A\lambda} \underline{I}_A = 20\sqrt{2} e^{j45^\circ} \cdot 5\sqrt{2} e^{-j45^\circ} = 200 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_B = \underline{Z}_{B\lambda} \underline{I}_B = 200 e^{-j120^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_{C\lambda} \underline{I}_C = 220 e^{j120^\circ} \text{ V}$$

Napięcia międzyfazowe odbiornika połączonego w gwiazdę

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = 200\sqrt{3} e^{j30^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = 200\sqrt{3} e^{-j90^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = 200\sqrt{3} e^{j150^\circ} \text{ V}$$

Napięcia te są napięciami fazowymi odbiornika połączonego w trójkąt. Zatem prądy fazowe odbiornika połączonego w trójkąt obliczymy korzystając z prawa Ohma

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{200\sqrt{3} e^{j30^\circ}}{60 + j60} = \frac{200\sqrt{3} e^{j30^\circ}}{60\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 4,08 e^{-j15^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{200\sqrt{3} e^{-j90^\circ}}{60\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 4,08 e^{-j135^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{200\sqrt{3} e^{j150^\circ}}{60\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 4,08 e^{j105^\circ} \text{ A}$$

Spadki napięcia na impedancjach przewodów łączących źródło z odbiornikiem w poszczególnych fazach wynoszą odpowiednio

$$\underline{U}_{pA} = \underline{Z}_{pA} \underline{I}_A = (2 + j2)(5 - j5) = 2\sqrt{2} e^{j45^\circ} \cdot 5\sqrt{2} e^{-j45^\circ} = 20 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{pB} = \underline{Z}_{pB} \underline{I}_B = 2\sqrt{2} e^{j45^\circ} \cdot 5\sqrt{2} e^{-j165^\circ} = 20 e^{-j120^\circ} = (-10 - j10\sqrt{3}) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{pC} = \underline{Z}_{pC} \underline{I}_C = 2\sqrt{2} e^{j45^\circ} \cdot 5\sqrt{2} e^{j75^\circ} = 20 e^{j120^\circ} = (-10 + j10\sqrt{3}) \text{ V}$$

Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa suma napięć źródła jest równa sumie napięć odbiornika w poszczególnych oczkach obwodu z rys. 4.3. Bilans napięć dla poszczególnych oczek opisujemy następująco:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{AB} = \underline{U}_{pA} + \underline{U}_{AB} - \underline{U}_{pB} &= 20 e^{j0^\circ} + 200\sqrt{3} e^{j30^\circ} + 20 e^{-j120^\circ} = \\ &= 220\sqrt{3} e^{j30^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{E}_{BC} &= \underline{U}_{pB} + \underline{U}_{BC} - \underline{U}_{pC} = 20e^{-j120^\circ} + 200\sqrt{3}e^{-j90^\circ} - 20e^{j120^\circ} = \\ &= 220\sqrt{3}e^{-j90^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{E}_{CA} &= \underline{U}_{pC} + \underline{U}_{CA} - \underline{U}_{pA} = 20e^{j120^\circ} + 200\sqrt{3}e^{j150^\circ} - 20e^{j0^\circ} = \\ &= 220\sqrt{3}e^{j150^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

4.2. Obwody trójfazowe niesymetryczne

4.4. Impedancje faz odbiornika trójfazowego niesymetrycznego (rys. 4.4a) połączonych w gwiazdę wynoszą: $\underline{Z}_A = (8 + j4) \Omega$, $\underline{Z}_B = (8 - j4) \Omega$, $\underline{Z}_C = 6 \Omega$. Napięcie międzyfazowe źródła symetrycznego, połączonych w gwiazdę, zasilającego odbiornik wynosi $U_p = 220 \text{ V}$. Obliczyć prądy fazowe:

1) w układzie trójprzewodowym: a) w stanie pracy normalnej, b) przy przerwie w fazie A, c) przy zwarcu fazy A;

2) w układzie czteroprzewodowym: a) przy impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 0$, b) przy impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 10 \Omega$.

Dla poszczególnych przypadków wykonać wykresy wektorowe.

ROZWIĄZANIE. Rozpatrujemy układ trójfazowy niesymetryczny gwiazda-gwiazda.

1a) W stanie pracy normalnej obliczamy napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_A \underline{E}_A + \underline{Y}_B \underline{E}_B + \underline{Y}_C \underline{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} \quad (\text{a})$$

Admitancje zespolone faz odbiornika wynoszą

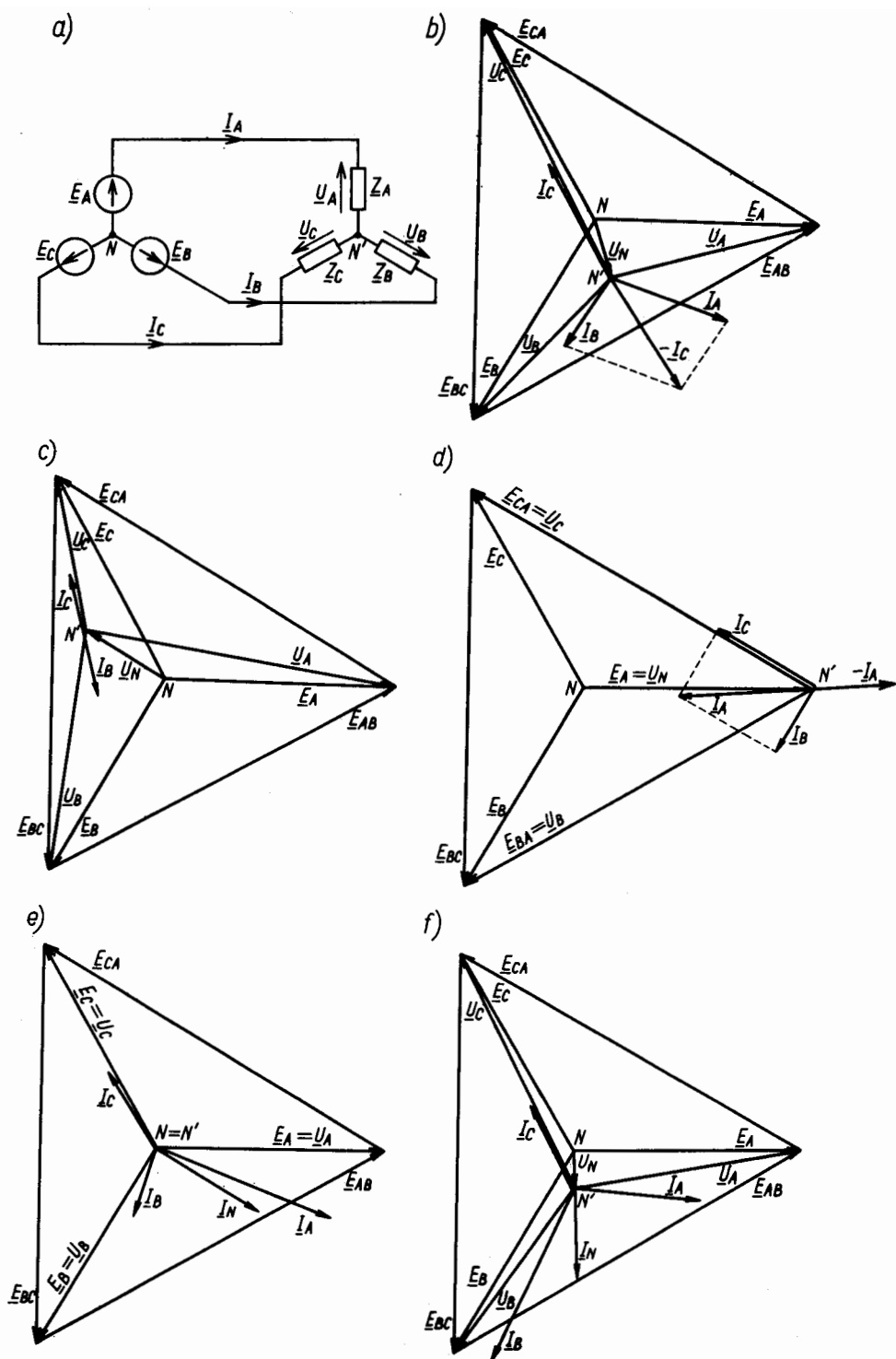
$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{8 + j4} = (0,1 - j0,05) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{8 - j4} = (0,1 + j0,05) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{6} = 0,166 \text{ S}$$

Moduł napięcia fazowego źródła symetrycznego

$$U_f = \frac{U_p}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ V}$$



Rys. 4.4

Na osi odniesienia przyjmujemy napięcie fazy A , wobec tego

$$\underline{E}_A = 127 \text{ V}$$

$$\underline{E}_B = a^2 \cdot 127 = (-63,5 - j63,5\sqrt{3}) \text{ V}$$

$$\underline{E}_C = a \cdot 127 = (-63,5 + j63,5\sqrt{3}) \text{ V}$$

Na podstawie wzoru (a)

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{127(0,1 - j0,05) + (-63,5 - j63,5\sqrt{3})(0,1 + j0,05) + (-63,5 + j63,5\sqrt{3})0,166}{0,1 - j0,05 + 0,1 + j0,05 + 0,166} = \\ &= (3,6 - j6,3) \text{ V} \end{aligned}$$

Wyznaczamy napięcia fazowe odbiornika

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_N = 127 - 3,6 + j6,3 = (123,4 + j6,3) \text{ V}$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_N = -63,5 - j110 - 3,6 + j6,3 = (-67,1 - j103,7) \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N = -63,5 + j110 - 3,6 + j6,3 = (-67,1 + j116,3) \text{ V}$$

Prądy fazowe równe prądom przewodowym wynoszą

$$\underline{I}_A = \underline{Y}_A \underline{U}_A = (0,1 - j0,05)(123,4 + j6,3) = (12,62 - j5,56) \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \underline{Y}_B \underline{U}_B = (0,1 + j0,05)(-67,1 + j103,7) = (-1,50 - j13,74) \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{U}_C = 0,166(-67,1 + j116,3) = (-11,12 + j19,3) \text{ A}$$

Suma prądów w punkcie neutralnym odbiornika wynosi

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 4.4b.

1b) Przy wystąpieniu przerwy w fazie A impedancja $Z_A = \infty$, a prąd $I_A = 0$. Prąd fazy B jest równy prądowi fazy C , tworzy się bowiem obwód o jednym oczku

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_{BC}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_C} = \frac{\underline{E}_B - \underline{E}_C}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_C} = (4,15 - j14,5) \text{ A}$$

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_B \underline{E}_B + \underline{Y}_C \underline{E}_C}{\underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = (-40 + j23,2) \text{ V}$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 4.4c.

1c) Przy zwarcu fazy A impedancja $\underline{Z}_A = 0$, a napięcie $\underline{U}_N$ jest równe napięciu fazowemu zwartej fazy $\underline{E}_A$, a więc

$$\underline{U}_N = \underline{E}_A$$

Napięcia fazowe odbiornika wynoszą

$$\underline{U}_A = 0$$

$$\underline{U}_B = (\underline{E}_B - \underline{U}_N) = (\underline{E}_B - \underline{E}_A) = \underline{E}_{BA} = -\underline{E}_{AB} = (-190,5 - j110) \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_N) = (\underline{E}_C - \underline{E}_A) = \underline{E}_{CA} = -\underline{E}_{AC} = (-190,5 + j110) \text{ V}$$

Prądy fazowe są równe

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{U}_C = 0,166(-190,5 + j110) = (-31,62 + j18,26) \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \underline{Y}_B \underline{U}_B = (0,1 + j0,05)(-190,5 - j110) = (-13,55 - j20,52) \text{ A}$$

Prąd fazy A obliczamy stosując prawo Kirchhoffa dla punktu neutralnego odbiornika, czyli

$$\underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C) = (45,17 + j2,26) \text{ A}$$

Wykres wektorowy prądów i napięć przedstawiono na rys. 4.4d.

Następnie rozpatrujemy układ czteroprzewodowy niesymetryczny gwiazda-gwiazda.

2a) Impedancja przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 0$.

Napięcia fazowe odbiornika są równe napięciom fazowym źródła

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A = 127 \text{ V}$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B = (-63,5 - j110) \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C = (-63,5 + j110) \text{ V}$$

Prądy fazowe równe prądom przewodowym wynoszą

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{127}{8 + j4} = \frac{127(8 - j4)}{80} = (12,7 - j6,35) \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{(-63,5 - j110)}{(8 - j4)} = (-0,85 - j14,11) \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{(-63,5 + j110)}{6} = (-10,58 + j18,33) \text{ A}$$

Prąd w przewodzie neutralnym, zgodnie z prawem Kirchhoffa, dla punktu neutralnego odbiornika wynosi

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = (1,27 - j2,13) \text{ A}$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 4.4e.

2b) Impedancja przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 10 \Omega$.

Napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika obliczamy wg zależności

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_A \underline{E}_A + \underline{Y}_B \underline{E}_B + \underline{Y}_C \underline{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = (2,8 - j5) \text{ V} \quad (\text{b})$$

Prądy przewodowe równe prądom fazowym wynoszą

$$\underline{I}_A = \underline{Y}_A \underline{U}_A = \underline{Y}_A (\underline{E}_A - \underline{U}_N) = (0,1 - j0,05)(124,2 + j5) = (12,52 - j5,7) \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \underline{Y}_B \underline{U}_B = \underline{Y}_B (\underline{E}_B - \underline{U}_N) = (0,1 + j0,05)(-66,3 + j105) = (-1,24 - j13,8) \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{U}_C = \underline{Y}_C (\underline{E}_C - \underline{U}_N) = 0,166(-66,3 + j115) = (-11 + j19) \text{ A}$$

Prąd w przewodzie neutralnym obliczamy stosując prawo Kirchhoffa dla punktu neutralnego odbiornika

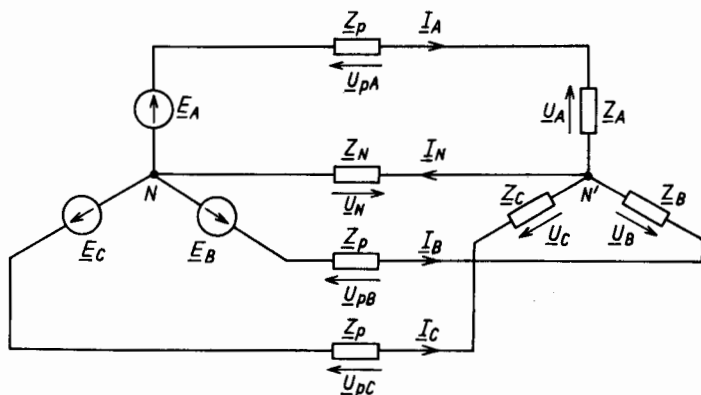
$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = (0,28 - j0,5) \text{ A}$$

Spadek napięcia na impedancji $\underline{Z}_N$ wynosi

$$\underline{U}_N = \underline{Z}_N \underline{I}_N = 10(0,28 - j0,5) = (2,8 - j5) \text{ V}$$

Otrzymana wartość napięcia $\underline{U}_N$ jest równa wartości obliczonej wg zależności (b). Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 4.4f.

4.5. Impedancje odbiornika niesymetrycznego, połączonego w gwiazdę jak na rys. 4.5, wynoszą $\underline{Z}_A = (10 + j8) \Omega$, $\underline{Z}_B = -j7 \Omega$, $\underline{Z}_C = 4 \Omega$. Odbiornik jest zasilany czteroprzewodową linią; impedancje przewodów łączących odbiornik ze źródłem zasilania $\underline{Z}_p = j2 \Omega$; impedancja przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = j2 \Omega$. Obliczyć prądy fazowe odbiornika oraz napięcia fazowe i międzyfazowe odbiornika. Napięcie międzyfazowe źródła zasilania $E_p = 346 \text{ V}$. Dla poszczególnych oczek obwodu dokonać bilansu napięć.



Rys. 4.5

ROZWIĄZANIE. Rozpatrujemy układ czteroprzewodowy. Moduł napięcia fazowego symetrycznego źródła wynosi

$$E_f = \frac{E_p}{\sqrt{3}} = \frac{346}{\sqrt{3}} = 200 \text{ V}$$

Przyjmujemy na osi odniesienia napięcie fazy A ; wobec tego $\underline{E}_A = 200 \text{ V}$;
 $\underline{E}_B = a^2 \cdot 200 = (-100 - j173) \text{ V}$; $\underline{E}_C = a \cdot 200 = (-100 + j173) \text{ V}$.
 Admitancje zespolone faz odbiornika oraz przewodu neutralnego wynoszą

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_{pA}} = \frac{1}{10 + j8 + j2} = \frac{1}{10 + j10} = (0,05 - j0,05) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_{pB}} = \frac{1}{-j7 + j2} = \frac{1}{-j5} = j0,2 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{pC}} = \frac{1}{4 + j2} = (0,2 - j0,1) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N} = \frac{1}{j2} = -j0,5 \text{ S}$$

Napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{\underline{Y}_A \underline{E}_A + \underline{Y}_B \underline{E}_B + \underline{Y}_C \underline{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \\ &= \frac{(0,05 - j0,05) 200 + j0,2(-100 - j173) + (0,2 - j0,1)(-100 + j173)}{0,25 - j0,45} = \\ &= (14,7 + j85) \text{ V} \end{aligned}$$

Aby obliczyć napięcia fazowe odbiornika, należy obliczyć prądy fazowe

$$\underline{I}_A = \underline{Y}_A (\underline{E}_A - \underline{U}_N) = (0,05 - j0,05)(200 - 14,7 - j85) = (5 - j13,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \underline{Y}_B (\underline{E}_B - \underline{U}_N) = j0,2(-100 - j174 - 14,7 - j85) = (51,6 - j22,94) \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{Y}_C (\underline{E}_C - \underline{U}_N) = (0,2 - j0,1)(-100 + j173 - 14,7 - j85) = \\ &= (14,1 + j29,07) \text{ A} \end{aligned}$$

Prąd w przewodzie neutralnym na podstawie prawa Kirchhoffa dla węzła N'

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = (42,5 - j7,37) \text{ A}$$

lub wg wzoru

$$\underline{I}_N = \underline{Y}_N \underline{U}_N = -j0,5(14,74 + j85) = (42,5 - j7,37) \text{ A}$$

Napięcia fazowe odbiornika wynoszą

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_A \underline{I}_A = (10 + j8)(5 - j13,5) = (158,3 - j95) \text{ V}$$

$$\underline{U}_B = \underline{Z}_B \underline{I}_B = -j7(51,6 - j22,94) = (-160,6 - j361,2) \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I}_C = 4(-14,1 + j29,07) = (-56,4 + j116,3) \text{ V}$$

Napięcia międzyfazowe odbiornika są równe

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = 158,3 - j95 + 160,6 + j361,2 = (318,8 + j266,2) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = -160,6 - j361,2 + 56,4 - j116,3 = (-104,2 - j477,5) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = -56,4 + j116,3 - 158,3 + j95 = (-214,7 + j211,3) \text{ V}$$

Suma wartości skutecznych zespolonych napięć międzyfazowych odbiornika wynosi zero

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0$$

Spadki napięć na impedancjach przewodów łączących źródło z odbiornikiem wynoszą odpowiednio

$$\underline{U}_{pA} = \underline{Z}_{pA} \underline{I}_A = (5 - j13,5) j2 = (27 + j10) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{pB} = \underline{Z}_{pB} \underline{I}_B = (51,6 - j22,94) j2 = (45,9 + j103,2) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{pC} = \underline{Z}_{pC} \underline{I}_C = (-14,1 + j29,07) j2 = (-58,2 - j28,3) \text{ V}$$

Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa suma napięć w każdym oczku obwodu obejmującym źródło, fazę i przewód neutralny jest równa zero.

Dla oczka fazy *A* otrzymujemy

$$\underline{E}_A - \underline{U}_{pA} - \underline{U}_A - \underline{U}_N = 200 - 27 - j10 - 158,3 + j95 - 14,7 - j85 = 0$$

Dla oczka fazy *B*

$$\begin{aligned} \underline{E}_B - \underline{U}_{pB} - \underline{U}_B - \underline{U}_N = \\ = -100 - j173 + 160,6 + j361,2 - 14,7 - j85 - 45,9 - j103,2 = 0 \end{aligned}$$

Dla oczka fazy *C*

$$\begin{aligned} \underline{E}_C - \underline{U}_{pC} - \underline{U}_C - \underline{U}_N = \\ = -100 + j173 + 58,2 + j28,3 + 56,5 - j116,3 - 14,7 - j85 = 0 \end{aligned}$$

4.6. Parametry odbiornika trójfazowego połączonego w gwiazdę jak na rys. 4.6a są następujące: $R_A = R_B = R_C = R = 50 \Omega$; $X_{LA} = X_{LB} = 20 \Omega$, współczynnik sprzężenia $k = 0,5$. Obliczyć moc czynną pobieraną przez odbiornik oraz wskazanie woltomierza. Napięcie fazy *A* źródła symetrycznego $\underline{E}_A = 260 \text{ V}$.

ROZWIĄZANIE. Reaktancja indukcyjności wzajemnej

$$X_M = k \sqrt{X_{LA} X_{LB}} = 0,5 \sqrt{20 \cdot 20} = 10 \Omega$$

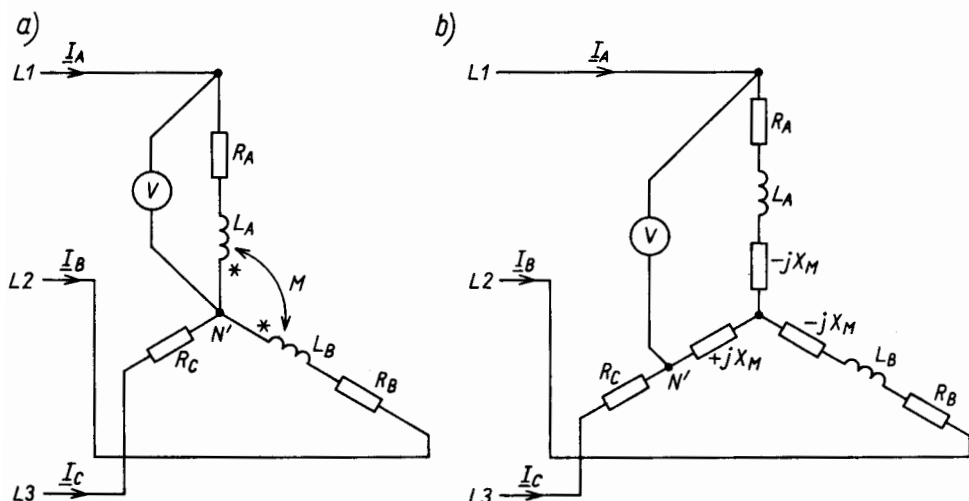
W celu obliczenia impedancji faz zastąpimy obwód ze sprzężeniami obwodem bez sprzężeń (rys. 4.6b). Ponieważ indukcyjności są przyłączone do punktu neutralnego zaciskami jednoimiennymi, otrzymujemy

$$\underline{Z}_A = R_A + j(X_{LA} - X_M) = 50 + j(20 - 10) = (50 + j10) \Omega$$

$$\underline{Z}_B = R_B + j(X_{LB} - X_M) = 50 + j(20 - 10) = (50 + j10) \Omega$$

$$\underline{Z}_C = R_C + jX_M = (50 + j10) \Omega$$

Impedancje poszczególnych faz są jednakowe, zatem odbiornik jest odbiornikiem symetrycznym.



Rys. 4.6

Woltomierz mierzy napięcie

$$\underline{U}_V = \underline{Z}_A \underline{I}_A - jX_M \underline{I}_C = \underline{U}_A - j10 \underline{I}_C$$

Prądy fazowe fazy A i fazy C wynoszą

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{260e^{j0}}{50 + j10} = \frac{26(5 - j1)}{26} = (5 - j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{260e^{j120^\circ}}{10(5 + j1)} = (-1,63 + j4,83) \text{ A}$$

Zatem

$$\underline{U}_V = 260 - j10(-1,63 + j4,83) = 260 + j16,3 + 48,3 = (308,3 + j16,3) \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza

$$U_V = \sqrt{308,3^2 + 16,3^2} = 308,7 \text{ V}$$

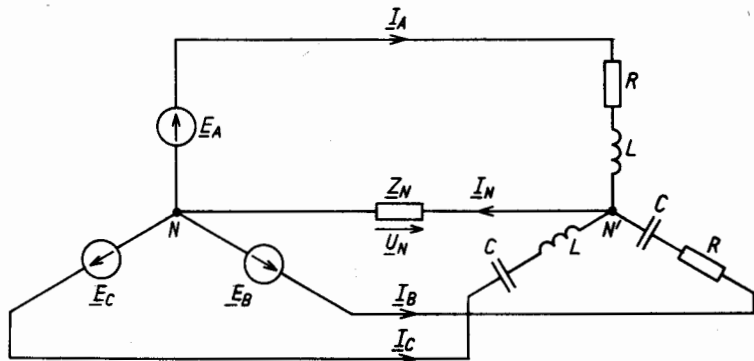
Moduły prądów fazowych są równe

$$I_f = I_A = I_B = I_C = \sqrt{26} = 5,09 \text{ A}$$

Moc czynna pobierana przez symetryczny odbiornik trójfazowy

$$P = 3P_A = 3R_A I_f^2 = 3 \cdot 50 \cdot 26 = 3900 \text{ W}$$

4.7. Obliczyć moc czynną wydzieloną w przewodzie neutralnym w obwodzie przedstawionym na rys. 4.7. Moduł napięcia fazowego symetrycznego źródła zasilania $E_f = 220 \text{ V}$. Parametry odbiornika wynoszą: $R = 100 \Omega$, $X_L = X_C = 50 \Omega$, $\underline{Z}_N = (3 + j4) \Omega$.



Rys. 4.7

ROZWIĄZANIE. Przyjmujemy, że

$$\underline{E}_A = 220e^{j90^\circ} \text{ V, zatem } \underline{E}_B = 220e^{-j30^\circ} \text{ V; } \underline{E}_C = 220e^{-j150^\circ} \text{ V}$$

Impedancje poszczególnych faz odbiornika wynoszą

$$\underline{Z}_A = R + jX_L = (100 + j50) \Omega$$

$$\underline{Z}_B = R - jX_C = (100 - j50) \Omega$$

$$\underline{Z}_C = jX_L - jX_C = 0$$

W fazie C odbiornika występuje zjawisko rezonansu napięć, zatem faza ta jest zwarta, a napięcie niesymetrii $\underline{U}_N$ jest równe napięciu fazowemu zwartej fazy $\underline{E}_C$

$$\underline{U}_N = \underline{E}_C = 220e^{-j150^\circ} \text{ V}$$

Prąd w przewodzie neutralnym

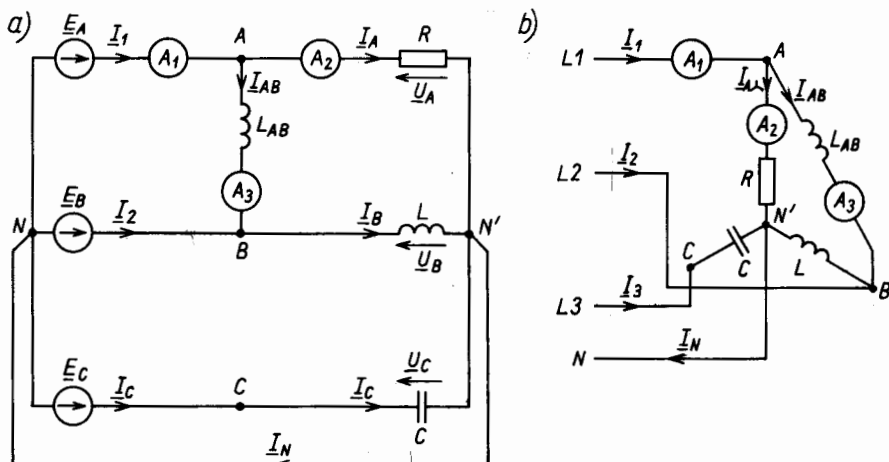
$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_N}{\underline{Z}_N} = \frac{220e^{-j150^\circ}}{3 + j4} = \frac{220e^{-j150^\circ}}{5e^{j53^\circ}} = 44e^{-j203^\circ} \text{ A}$$

Moc czynna wydzielona w przewodzie neutralnym wynosi

$$P = R_N I_N^2 = 3 \cdot 44^2 = 5808 \text{ W}$$

Warto dodać, że przy zwarcu dowolnej fazy odbiornika w układzie cztero-przewodowym, gdy impedancja $\underline{Z}_N = 0$, układ przestaje być układem trój-fazowym, ponieważ powstaje zwarcie jednej fazy źródła.

4.8. Do symetrycznego źródła napięcia przyłączono odbiornik niesymetryczny, połączony w gwiazdę w układzie czteroprzewodowym przy impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 0$, a między fazami A i B włączono cewkę o indukcyjności L_{AB} (rys. 4.8a). Obliczyć wskazanie amperomierza A_1 , jeżeli wiadomo, że amperomierz A_2 wskazuje 8 A, a amperomierz A_3 wskazuje 10 A.



Rys. 4.8

ROZWIĄZANIE. Włączenie na napięcie międzyfazowe U_{AB} cewki o indukcyjności L_{AB} nie zmienia charakteru odbiornika, który pozostaje nadal odbiornikiem niesymetrycznym połączonym w gwiazdę. Zakładając dla uproszczenia, że początkowa napięcia źródłowego fazy A jest równa zero, otrzymujemy

$$\underline{E}_A = E_A e^{j0^\circ} \quad \underline{E}_{AB} = E_{AB} e^{j30^\circ}$$

Występowanie bezimpedancyjnego przewodu neutralnego powoduje, że napięcie $\underline{U}_N = 0$, a napięcia odbiornika są równe napięciom fazowym źródła. Zatem

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A \quad \text{oraz} \quad \underline{U}_{AB} = \underline{E}_{AB} = E_{AB} e^{j30^\circ} = U_{AB} e^{j30^\circ}$$

Prąd fazy A odbiornika połączzonego w gwiazdę zgodnie z rys. 4.8a i z równoważnym mu układem na rys. 4.8b wynosi

$$\underline{I}_{A\lambda} = \frac{\underline{U}_A}{R} = 8 e^{j0^\circ} \text{ A}$$

Prąd $\underline{I}_{AB}$ wynosi

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{U_{AB} e^{j30^\circ}}{X_{LAB} e^{j90^\circ}} = 10 e^{-j60^\circ} = (5 - j5\sqrt{3}) \text{ A}$$

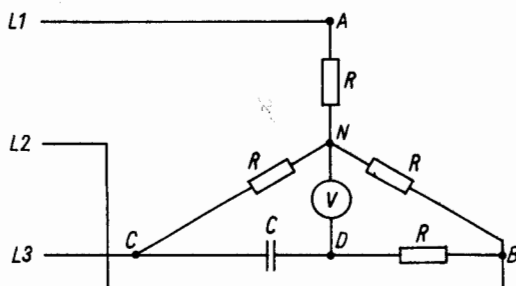
Prąd $\underline{I}_1$ zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła A wynosi

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{A\lambda} + \underline{I}_{AB} = 8 + 5 - j5\sqrt{3} = (13 - j5\sqrt{3}) \text{ A}$$

Wskazanie amperomierza A_1

$$I_{A1} = \sqrt{13^2 + (5\sqrt{3})^2} = 15,62 \text{ A}$$

4.9. Obliczyć wskazanie woltomierza w symetrycznym trójprzewodowym układzie gwiazda-gwiazda przedstawionym na rys. 4.9. Moduł napięcia międzyfazowego $U_p = 380 \text{ V}$, $R = X_C = 10 \Omega$.



Rys. 4.9

ROZWIĄZANIE. Po włączeniu impedancji $\underline{Z}_{BC} = R - jX_C$ na napięcie międzyfazowe $\underline{U}_{BC}$ odbiornik nadal pozostaje symetryczny o charakterze rezystancyjnym. Napięcie $\underline{U}_N = 0$. Napięcia fazowe odbiornika są równe napięciom fazowym źródła zasilania. Przyjmując, że faza początkowa napięcia źródłowego fazy A wynosi 90° , otrzymujemy wartości skuteczne zespolone napięć fazowych i napięć międzyfazowych

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= 220e^{j90^\circ} \text{ V}; & \underline{U}_{AB} &= 380e^{j120^\circ} \text{ V} \\ \underline{U}_B &= 220e^{-j30^\circ} \text{ V}; & \underline{U}_{BC} &= 380e^{j0} \text{ V} \\ \underline{U}_C &= 220e^{-j150^\circ} \text{ V}; & \underline{U}_{CA} &= 380e^{-j120^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

Woltomierz mierzy napięcie

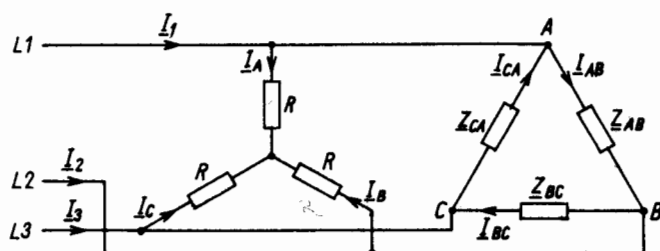
$$\begin{aligned} \underline{U}_V &= \underline{U}_{DN} = \underline{U}_B - \underline{U}_{BD} = \underline{U}_B - R \frac{\underline{U}_{BC}}{R - jX_C} = \\ &= 110\sqrt{3} - j110 - 10 \frac{380}{10 - j10} = -j300 \text{ V} \end{aligned}$$

Zatem jego wskazanie

$$U_V = 300 \text{ V}$$

4.10. Obliczyć wartości prądów przewodowych w obwodzie przedstawionym na rys. 4.10. Napięcie fazy A symetrycznego źródła zasilania $e_A = 220\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$. Odbiornik połączony w gwiazdę ma następujące pa-

rametry: $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = 22 \Omega$. Impedancje odbiornika połączonego w trójkąt wynoszą: $\underline{Z}_{AB} = 38 \Omega$, $\underline{Z}_{BC} = -j19 \Omega$, $\underline{Z}_{CA} = j38 \Omega$.



Rys. 4.10

ROZWIĄZANIE. Odbiornik połączony w gwiazdę jest odbiornikiem symetrycznym, zatem $\underline{U}_N = 0$, a napięcia fazowe odbiornika są równe napięciom fazowym źródła zasilania. Prądy fazowe odbiornika wynoszą

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220e^{j0^\circ}}{22} = 10 \text{ A}; \quad \underline{I}_B = 10e^{-j120^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_C = 10e^{j120^\circ} \text{ A}$$

Odbiornik połączony w trójkąt jest odbiornikiem niesymetrycznym. Ponieważ nie uwzględniamy impedancji przewodów zasilających, wobec tego napięcie międzyfazowe źródła zasilania staje się napięciem fazowym odbiornika połączonego w trójkąt. Zatem prądy fazowe odbiornika połączonego w trójkąt wynoszą

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{380e^{j30^\circ}}{38e^{j0^\circ}} = 10e^{j30^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{380e^{-j90^\circ}}{19e^{-j90^\circ}} = 20 \text{ A}$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{380e^{j150^\circ}}{38e^{j90^\circ}} = 10e^{j60^\circ} \text{ A}$$

Prądy przewodowe są równe

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_A + \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = (13,66 - j3,66) \text{ A}$$

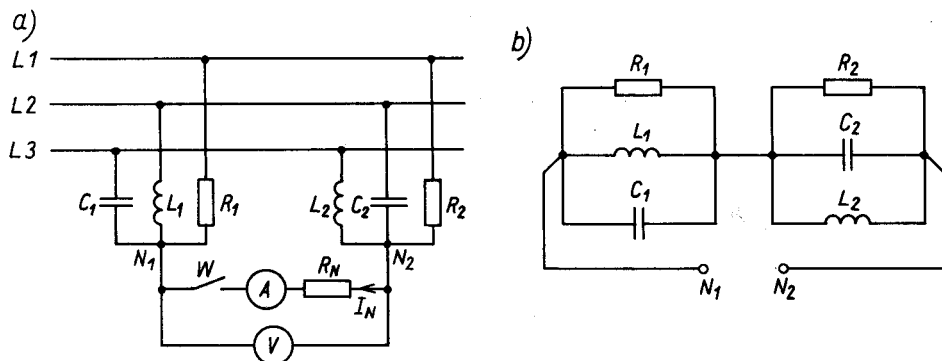
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_B + \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = (6,34 - j13,66) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_C + \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = (-20 + j17,32) \text{ A}$$

Suma wartości skutecznych zespolonych prądów przewodowych

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

4.11. Do symetrycznego generatora o napięciu fazowym $\underline{E}_A = 220 \text{ V}$ przyłączono dwa odbiorniki połączone w gwiazdę (rys. 4.11a). Obliczyć: a) wskazanie woltomierza przy otwartym łączniku W , b) wskazanie amperomierza przy zamkniętym łączniku W . Dane: $\underline{Z}_N = R_N = 4 \Omega$, $R_1 = X_{L1} = X_{C1} = 20 \Omega$, $R_2 = X_{L2} = X_{C2} = 20 \Omega$.



Rys. 4.11

ROZWIĄZANIE. Symetryczne źródło jest połączone z dwoma niesymetrycznymi odbiornikami.

a) Woltomierz przy otwartym łączniku W mierzy napięcie między punktami neutralnymi odbiornika pierwszego i drugiego

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{N1} - \underline{U}_{N2}$$

Napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika pierwszego

$$\underline{U}_{N1} = \frac{0,05 \cdot 220 + 0,05 e^{-j90^\circ} \cdot 220 e^{-j120^\circ} + 0,05 e^{j90^\circ} \cdot 220 e^{j120^\circ}}{0,05} = -161 \text{ V}$$

Napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika drugiego

$$\underline{U}_{N2} = \frac{0,05 \cdot 220 + 0,05 e^{j90^\circ} \cdot 220 e^{-j120^\circ} + 0,05 e^{-j90^\circ} \cdot 220 e^{j120^\circ}}{0,05} = 601 \text{ V}$$

Zatem

$$\underline{U}_N = \underline{U}_{N1} - \underline{U}_{N2} = -161 - 601 = -762 \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza wynosi

$$U_V = 762 \text{ V}$$

b) W celu obliczenia wskazania amperomierza przy zamkniętym łączniku W zastosujemy twierdzenie Thevenina. Wyznaczamy prąd w przewodzie łączącym punkty neutralne odbiorników

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_N}{\underline{Z}_{w12} + \underline{Z}_g}$$

gdzie: $\underline{U}_N$ — napięcie przy otwartym łączniku W , $\underline{Z}_{w12}$ — impedancja widziana z otwartych zacisków łącznika W przy zwartym trójfazowym źródle napięcia i odłączonej impedancji $\underline{Z}_N$ (rys. 4.11b), $\underline{Z}_g$ — impedancja gałęzi, w której obliczamy prąd, $\underline{Z}_g = R_N = 4 \Omega$.

Uwzględniając, że $X_{L1} = X_{C1}$ oraz $X_{L2} = X_{C2}$, impedancja $\underline{Z}_{w12}$ obliczona zgodnie z rys. 4.11b wynosi

$$\underline{Z}_{w12} = R_1 + R_2 = 40 \Omega$$

Zatem prąd $\underline{I}_N$ jest równy

$$\underline{I}_N = \frac{-762}{40 + 4} = -17,3 \text{ A}$$

Wskazanie amperomierza $I = 17,3 \text{ A}$.

4.12. Symetryczny generator trójfazowy połączony w gwiazdę o napięciu fazowym $\underline{E}_A = 120 \text{ V}$ zasila odbiornik połączony w trójkąt (rys. 4.12a) o impedancji każdej z faz odbiornika $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = (30 + j40) \Omega$. Reaktancja indukcji wzajemnej $X_M = 5 \Omega$. Impedancje przewodów łączących odbiornik ze źródłem $\underline{Z}_{pA} = \underline{Z}_{pB} = -j5 \Omega$; $\underline{Z}_{pC} = j5 \Omega$. Obliczyć prądy fazowe odbiornika.

ROZWIĄZANIE. W celu obliczenia poszczególnych impedancji obwód ze sprzężeniami z rys. 4.12a zastąpimy obwodem bez sprzężeń z rys. 4.12b.

Dla obwodu z rys. 4.12b:

— impedancje przewodów łączących

$$\underline{Z}'_{pA} = \underline{Z}_{pA} + jX_M = 0; \quad \underline{Z}'_{pB} = \underline{Z}_{pB} + jX_M = 0; \quad \underline{Z}'_{pC} = \underline{Z}_{pC} - jX_M = 0$$

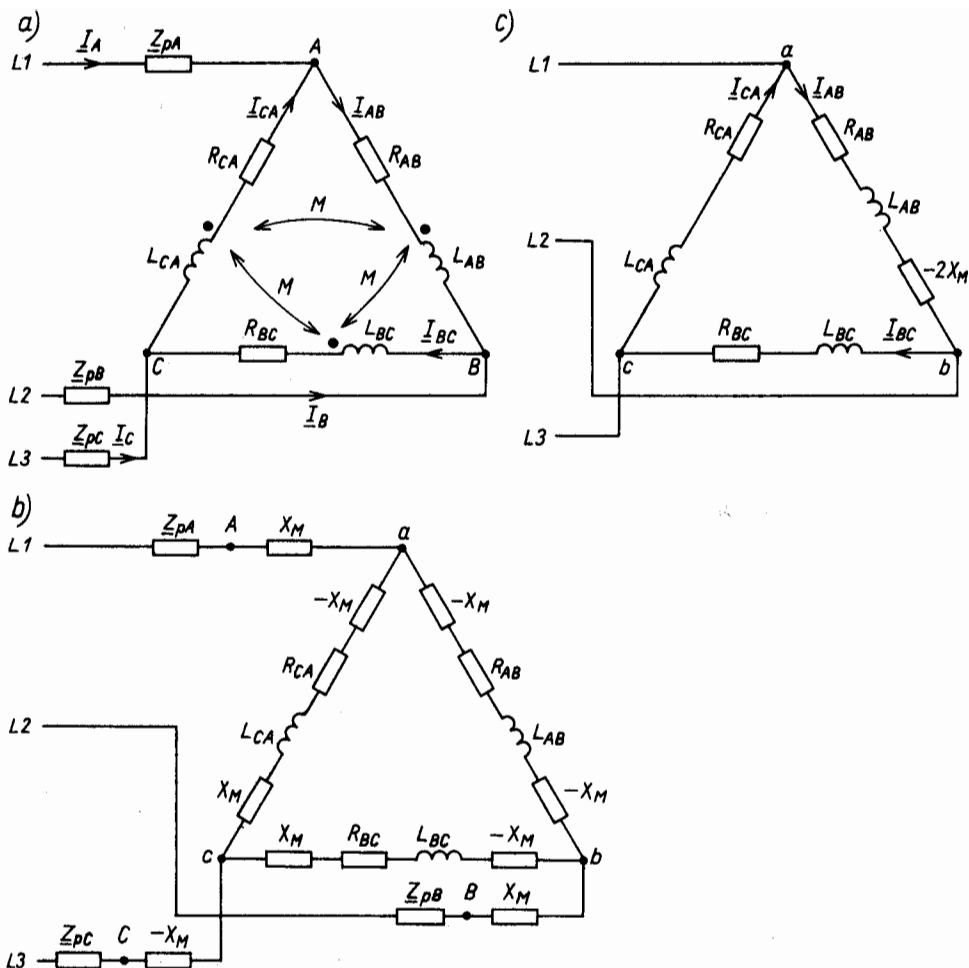
Impedancje faz odbiornika (rys. 4.12c):

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{AB} - j2X_M = 30 + j30 = 30\sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega$$

$$\underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = 30 + j40 = 50 e^{j53^\circ} \Omega$$

W wyniku eliminacji sprzężeń otrzymaliśmy odbiornik niesymetryczny połączony w trójkąt (rys. 4.12c). Napięcie fazowe tego odbiornika równa się napięciu międzyfazowemu źródła zasilania. Prądy fazowe odbiornika w postaci wykładniczej wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{120\sqrt{3} e^{j30^\circ}}{30\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 2\sqrt{6} e^{-j15^\circ} \text{ A}$$



Rys. 4.12

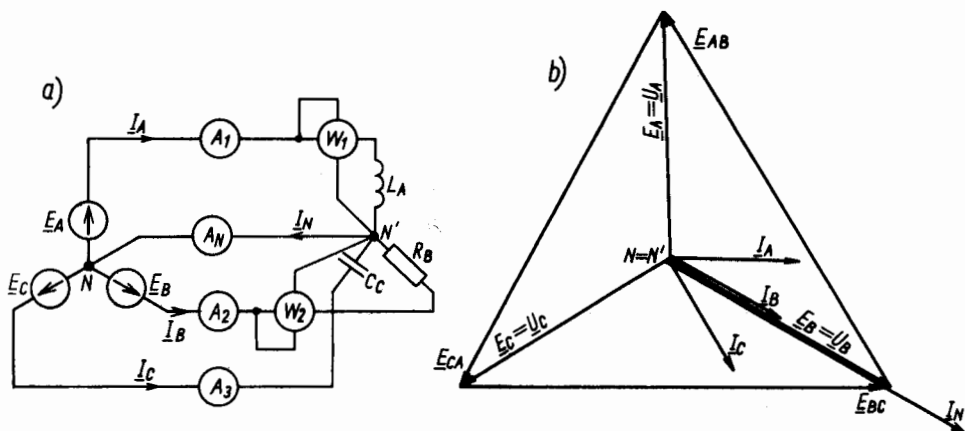
$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{E}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{20\sqrt{3} e^{-j90^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 2,4\sqrt{3} e^{-j143^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{E}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{120\sqrt{3} e^{j150^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 2,4\sqrt{3} e^{j97^\circ} \text{ A}$$

4.3. Pomiar mocy w układach trójfazowych

4.13. Odbiornik trójfazowy niesymetryczny połączony w gwiazdę jak na rys. 4.13a jest zasilany ze źródła symetrycznego o napięciu fazy A , $e_A = 141 \cos \omega t$ V. Obliczyć wskazania amperomierzy, watomierzy, moc pobie-

raną przez odbiornik oraz narysować wykres wektorowy. Dane:
 $R = X_L = X_C = 10 \Omega$.



Rys. 4.13

ROZWIĄZANIE. Przewód neutralny o impedancji $Z_N = 0$ (pomijamy rezystancję wewnętrzną amperomierza) powoduje, że napięcia fazowe odbiornika są równe napięciom fazowym źródła. Prądy przewodowe, równe prądom fazowym, wynoszą

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{100e^{j90^\circ}}{10e^{j90^\circ}} = 10 \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{100e^{-j30^\circ}}{10} = 10e^{-j30^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{100e^{-j150^\circ}}{10e^{-j90^\circ}} = 10e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

Prąd w przewodzie neutralnym

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 10 + 5\sqrt{3} - j5 + 5 - j5\sqrt{3} = (23,66 - j13,66) \text{ A}$$

Wskazania amperomierzy wynoszą

$$I_{A1} = I_{A2} = I_{A3} = 10 \text{ A}; \quad I_{AN} = \sqrt{23,66^2 + 13,66^2} = 27,3 \text{ A}$$

Moc pobierana przez odbiornik trójfazowy niesymetryczny jest równa sumie mocy pobieranych przez poszczególne fazy odbiornika

$$\underline{S}_A = P_A + jQ_A = \underline{U}_A \underline{I}_A^* = j100 \cdot 10 = j1000 = (0 + j1000) \text{ V}\cdot\text{A}$$

$$\underline{S}_B = P_B + jQ_B = \underline{U}_B \underline{I}_B^* = 100e^{-j30^\circ} \cdot 10e^{j30^\circ} = 1000 = (1000 + j0) \text{ V}\cdot\text{A}$$

$$\underline{S}_C = P_C + jQ_C = \underline{U}_C \underline{I}_C^* = 100e^{-j150^\circ} \cdot 10e^{j60^\circ} = -j1000 = (0 - j1000) \text{ V}\cdot\text{A}$$

Zatem w fazie A występuje tylko moc bierna o charakterze indukcyjnym, a w fazie C tylko moc bierna o charakterze pojemnościowym. W fazie B wydzieli się wyłącznie moc czynna.

Odbiornik pobiera moc $\underline{S} = P + jQ = \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C = (1000 + j0) \text{ V}\cdot\text{A}$

Analogiczne wyniki otrzymujemy korzystając ze wzorów

$$Q_A = X_L I_A^2 = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ var} \quad (\text{o charakterze indukcyjnym})$$

$$P_B = R_B I_B^2 = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ W}$$

$$Q_C = X_C I_C^2 = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ var} \quad (\text{o charakterze pojemnościowym})$$

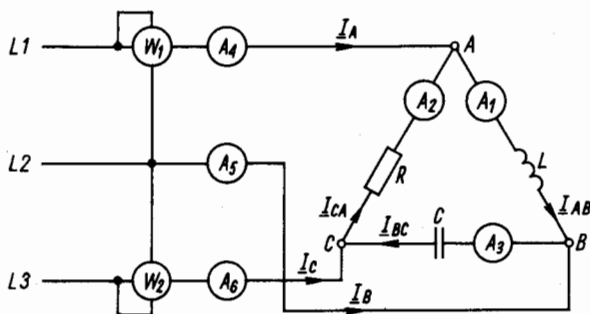
Wskazania watomierzy

$$P_1 = \operatorname{Re}(\underline{U}_A \underline{I}_A^*) = 0$$

$$P_2 = \operatorname{Re}(\underline{U}_B \underline{I}_B^*) = 1 \text{ kW}$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 4.13b.

4.14. Amperomierze A_1 , A_2 i A_3 wskazują wartości równe 2 A. Obliczyć wskazania amperomierzy A_4 , A_5 i A_6 oraz watomierzy W_1 i W_2 w obwodzie na rys. 4.14. Napięcie międzyfazowe źródła zasilania $U_p = 380 \text{ V}$.



Rys. 4.14

ROZWIĄZANIE. Prądy fazowe odbiornika połączonego w trójkąt wynoszą

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{\underline{U}_{AB} e^{j0^\circ}}{\underline{Z}_{AB} e^{j90^\circ}} = 2e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{\underline{U}_{BC} e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_{BC} e^{-j90^\circ}} = 2e^{-j30^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{\underline{U}_{CA} e^{j120^\circ}}{\underline{Z}_{CA} e^{j0^\circ}} = 2e^{j120^\circ} \text{ A}$$

Prądy przewodowe oraz wskazania amperomierzy wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = -j2 + 1 - j\sqrt{3} = (1 - j3,73) \text{ A}, \quad \text{stąd } I_{A4} = 3,86 \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = \sqrt{3} - j1 + j2 = (1,73 + j1) \text{ A}, \quad \text{stąd } I_{A5} = 2 \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = -1 + j\sqrt{3} - \sqrt{3} + j1 = (-2,73 + j2,73) \text{ A}, \\ \text{stąd } I_{A6} = 3,86 \text{ A}$$

Suma wartości zespolonych prądów przewodowych

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$$

Wskazania watomierzy wynoszą

$$P_1 = \operatorname{Re}(\underline{U}_{AB} \underline{I}_A^*) = \operatorname{Re}[380(1 + j3,73)] = 380 \text{ W}$$

$$P_2 = \operatorname{Re}(\underline{U}_{CB} \underline{I}_C^*) = \operatorname{Re}[(190 + j190\sqrt{3})(-2,73 - j2,73)] = 380 \text{ W}$$

Suma algebraiczna wskazań watomierzy w tzw. układzie pomiarowym Arona, włączonych jak na rys. 4.14, jest mocą czynną pobieraną przez odbiornik symetryczny lub niesymetryczny.

Zatem

$$P_{\text{odb}} = P_1 + P_2 = 760 \text{ W}$$

Moc czynna w układzie na rys. 4.14 jest wydzielana tylko na rezystancji R znajdującej się w fazie AC odbiornika. Wartość rezystancji R jest ilorazem modułów: napięcia fazowego U_{CA} i prądu fazowego I_{CA}

$$R = \frac{U_{CA}}{I_{CA}} = \frac{380}{2} = 190 \Omega$$

Moc czynną wydzieloną na rezystancji R obliczamy ze wzoru

$$P_R = R I_{CA}^2 = 190 \cdot 2^2 = 760 \text{ W}$$

Moc ta równa jest sumie algebraicznej wskazań watomierzy.

4.15. Generator symetryczny trójfazowy o napięciu fazowym $e_A = 220\sqrt{2} \sin(314t + 90^\circ)$ V zasila połączony w gwiazdę odbiornik symetryczny o charakterze indukcyjnym. Określić parametry R oraz L tego odbiornika, jeżeli watomierze włączone jak na rys. 4.15a wskazują moce $P_1 = 1500 \text{ W}$, $P_2 = 500 \text{ W}$.

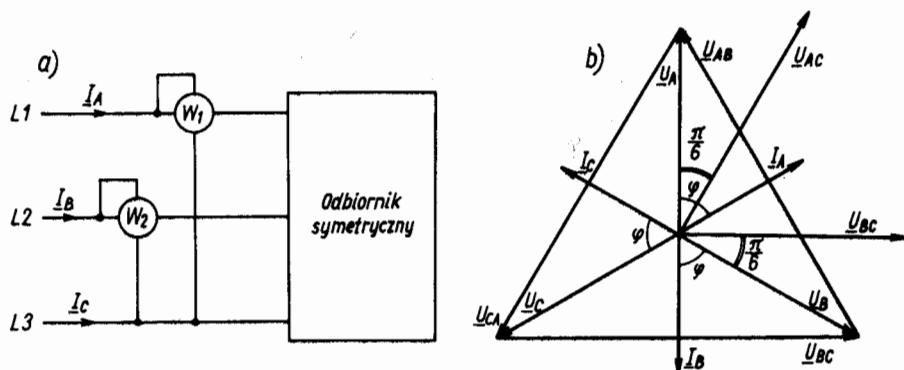
ROZWIĄZANIE. Układ przedstawiony na rys. 4.15a jest stosowany do pomiaru mocy w układach trójfazowych trójprzewodowych. Zgodnie z rys. 4.15b watomierze W_1 i W_2 wskazują odpowiednio

$$P_1 = U_{AB} I_A \cos(\varphi - 30^\circ)$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi + 30^\circ)$$

Suma wskazań watomierzy jest równa mocy czynnej pobieranej przez odbiornik

$$P = P_1 + P_2 = \sqrt{3} U_p I_f \cos \varphi = 2000 \text{ W}$$



Rys. 4.15

Należy zwrócić uwagę, że mimo symetrii układu w ogólnym przypadku wskazania watomierzy nie są równe. Wskazania watomierzy są jednakowe tylko wówczas, gdy kąt fazowy odbiornika $\varphi = 0$, tzn. gdy odbiornik ma charakter rezystancyjny. Znając wskazania watomierzy włączonych jak na rys. 4.15a, kąt fazowy odbiornika obliczamy z zależności

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{stąd} \quad \varphi = 40^\circ 50'$$

Prąd fazowy odbiornika

$$I_f = \frac{P}{\sqrt{3} U_p \cos \varphi} = \frac{2000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,756} = 4 \text{ A}$$

Moduł impedancji jednej fazy jest równy

$$Z = \frac{U_f}{I_f} = \frac{220}{4} = 55 \Omega$$

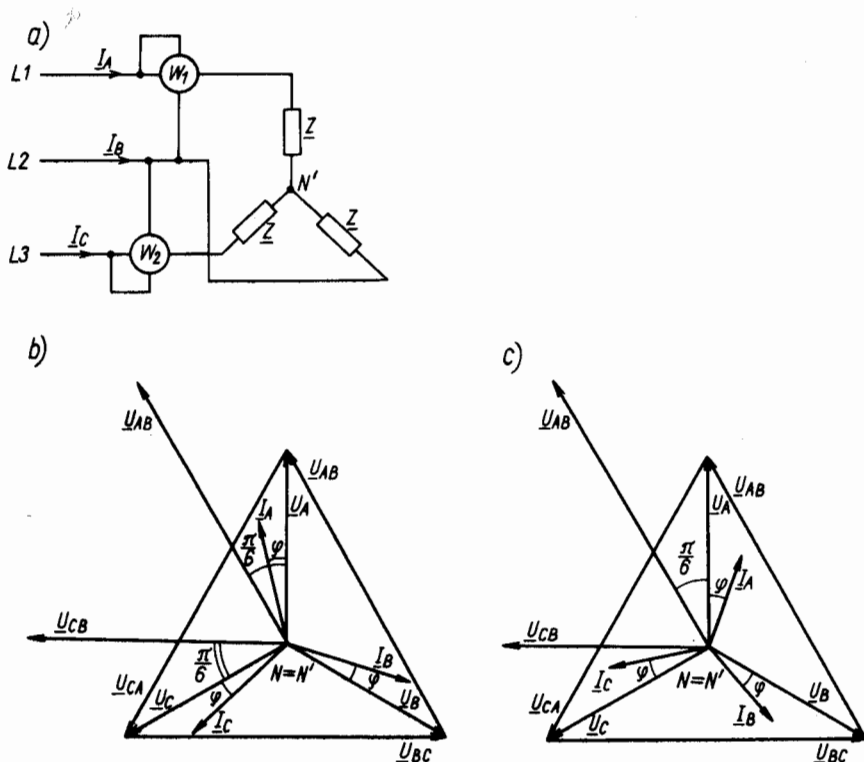
Rezystancja oraz reaktancja odbiornika wynoszą odpowiednio

$$R = Z \cos \varphi = 41,6 \Omega; \quad X_L = Z \sin \varphi = 36 \Omega$$

a indukcyjność

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{36}{314} = 114 \text{ mH}$$

4.16. Symetryczny odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę, przedstawiony na rys. 4.16a, pobiera moc czynną $P = 5,7 \text{ kW}$. Obliczyć wskazania watomierzy W_1 i W_2 , jeżeli napięcie międzyfazowe $U_p = 380 \text{ V}$, a prąd fazowy $I_f = 10 \text{ A}$.



Rys. 4.16

ROZWIĄZANIE. Współczynnik mocy odbiornika

$$\cos \varphi = \frac{P}{\sqrt{3} U_p I_f} = \frac{5700}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 10} = 0,863; \quad \varphi = \pm 30^\circ$$

Jeśli odbiornik ma charakter pojemnościowy, to $\varphi = -30^\circ$, a wskazania watomierzy wynoszą odpowiednio (rys. 4.16b)

$$P_1 = U_{AB} I_A \cos(30^\circ - \varphi) = U_{AB} I_A \cos 0 = 3800 \text{ W}$$

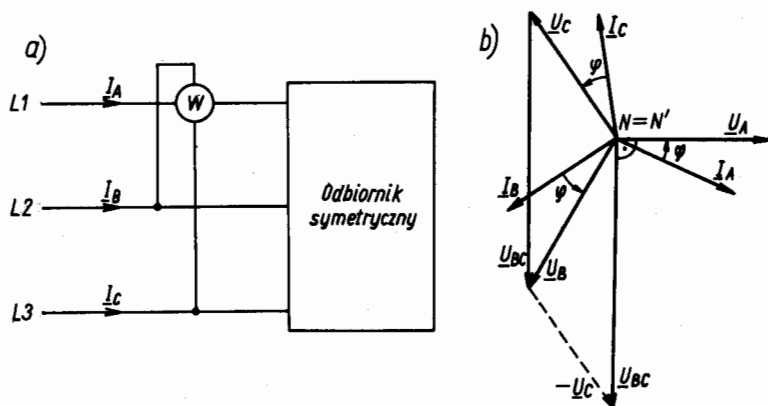
$$P_2 = U_{CB} I_C \cos(30^\circ + \varphi) = U_{CB} I_C \cos 60^\circ = 1900 \text{ W}$$

Jeśli natomiast odbiornik ma charakter indukcyjny, to $\varphi = +30^\circ$, a wskazania watomierzy wynoszą (rys. 4.16c)

$$P_1 = U_{AB} I_A \cos(30^\circ + \varphi) = 1900 \text{ W}$$

$$P_2 = U_{CB} I_C \cos(30^\circ - \varphi) = 3800 \text{ W}$$

4.17. Obliczyć wskazanie watomierza W oraz moc bierną pobieraną przez odbiornik symetryczny, połączony w gwiazdę o impedancji każdej z faz $\underline{Z} = (10 + j10) \Omega$, w układzie przedstawionym na rys. 4.17a. Źródło zasilania symetryczne, o napięciu fazy A , $e_A = 100\sqrt{2} \sin \omega t$ V.



Rys. 4.17

ROZWIĄZANIE. Przez watomierz płynie prąd fazowy

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{10 + j10} = 5\sqrt{2} e^{-j45^\circ}$$

Cewka napięciowa watomierza jest włączona na napięcie międzyfazowe U_{BC} . Watomierz zgodnie z rys. 4.17b mierzy moc

$$P = U_{BC} I_f \cos(90^\circ - \varphi) = U_p I_f \sin \varphi$$

Zgodnie z treścią zadania kąt fazowy odbiornika $\varphi = 45^\circ$, zatem watomierz wskazuje moc

$$P = 100\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 500\sqrt{3} \text{ W}$$

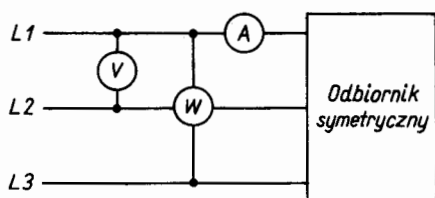
W układzie trójfazowym symetrycznym można zmierzyć moc bierną pobieraną przez odbiornik za pomocą jednego watomierza włączonego jak na rys. 4.17a. Moc bierna pobierana przez odbiornik symetryczny

$$Q = 3 U_f I_f \sin \varphi = \sqrt{3} U_p I_f \sin \varphi$$

Zatem, aby obliczyć moc bierną odbiornika, należy wskazanie watomierza pomnożyć przez $\sqrt{3}$, czyli

$$Q = \sqrt{3} \cdot 500\sqrt{3} = 1500 \text{ var}$$

4.18. Ze źródła symetrycznego jest zasilany symetryczny odbiornik. Obliczyć moc czynną, bierną i pozorną pobieraną przez odbiornik, jeżeli wskazania przyrządów w obwodzie jak na rys. 4.18 są następujące: $P_W = 1500 \text{ W}$, $U_V = 380 \text{ V}$, $I_A = 10 \text{ A}$.



Rys. 4.18

ROZWIĄZANIE. Watomierz włączony jak na rys. 4.18 służy do pomiaru mocy biernej odbiornika symetrycznego. Moc bierną odbiornika otrzymujemy mnożąc przez $\sqrt{3}$ wskazania watomierza

$$Q = \sqrt{3} \cdot 1500 = 2598 \text{ var}$$

Moc pozorna odbiornika

$$S = 3 U_f I_f = \sqrt{3} U_p I_f = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 10 = 6600 \text{ V} \cdot \text{A}$$

Moc czynna odbiornika

$$P = \sqrt{S^2 - Q^2} = 6067 \text{ W}$$

Współczynnik mocy odbiornika wynosi

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = 0,919$$

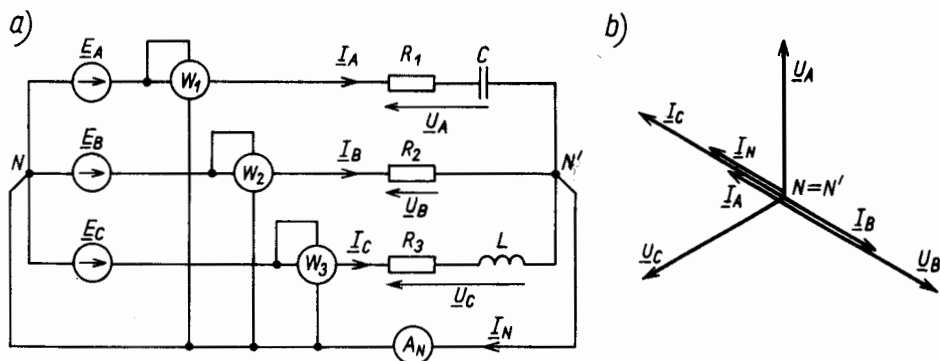
4.19. Moc czynna P odbiornika niesymetrycznego, połączonego w gwiazdę (rys. 4.19a), zasilanego z symetrycznego źródła napięcia w układzie czteroprzewodowym przy $\underline{Z}_N = 0$ o napięciu fazy A , $e_A = 220\sqrt{2} \sin(314t + 90^\circ) \text{ V}$, wynosi 4950 W. Moduły prądów fazowych w fazie A i B wynoszą $I_A = 5 \text{ A}$, $I_B = 10 \text{ A}$. Współczynnik mocy $\cos \varphi_A = \cos \varphi_C = 0,5$. Obliczyć wskazania watomierzy i amperomierza oraz wykonać wykres wektorowy.

ROZWIĄZANIE. W układzie czteroprzewodowym przy impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 0$ napięcia fazowe odbiornika są równe napięciom fazowym źródła zasilania

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A = 220e^{j90^\circ} = j220 \text{ V}$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B = 220e^{-j30^\circ} = (110\sqrt{3} - j110) \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C = 220e^{-j150^\circ} = (-110\sqrt{3} - j110) \text{ V}$$



Rys. 4.19

W układzie czteroprzewodowym moc czynną można zmierzyć za pomocą trzech watomierzy w układzie przedstawionym na rys. 4.19a. Suma algebraiczna wskazań poszczególnych watomierzy stanowi moc czynną P , jaką pobiera odbiornik. Watomierze włączone jak na rys. 4.19a mierzą moce czynne w poszczególnych fazach

$$P_1 = U_A I_A \cos \varphi_A = 220 \cdot 5 \cdot 0,5 = 550 \text{ W}$$

$$P_2 = U_B I_B \cos \varphi_B = 220 \cdot 10 \cdot 1 = 2200 \text{ W}$$

$$P_3 = U_C I_C \cos \varphi_C = P - P_1 - P_2 = 2200 \text{ W}$$

Z zależności na moc czynną fazy C obliczamy moduł prądu tej fazy

$$I_C = \frac{P_3}{U_C \cos \varphi_C} = \frac{2200}{220 \cdot 0,5} = 20 \text{ A}$$

Wartości skuteczne zespolone prądów fazowych

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220e^{j90^\circ}}{Z_A e^{-j60^\circ}} = 5e^{j150^\circ} = (-4,33 + j2,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{R} = \frac{220e^{-j30^\circ}}{R} = 10e^{-j30^\circ} = (8,66 - j5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{220e^{j210^\circ}}{Z_C e^{j60^\circ}} = 20e^{j150^\circ} = (-17,3 + j10) \text{ A}$$

Prąd zespolony w przewodzie neutralnym

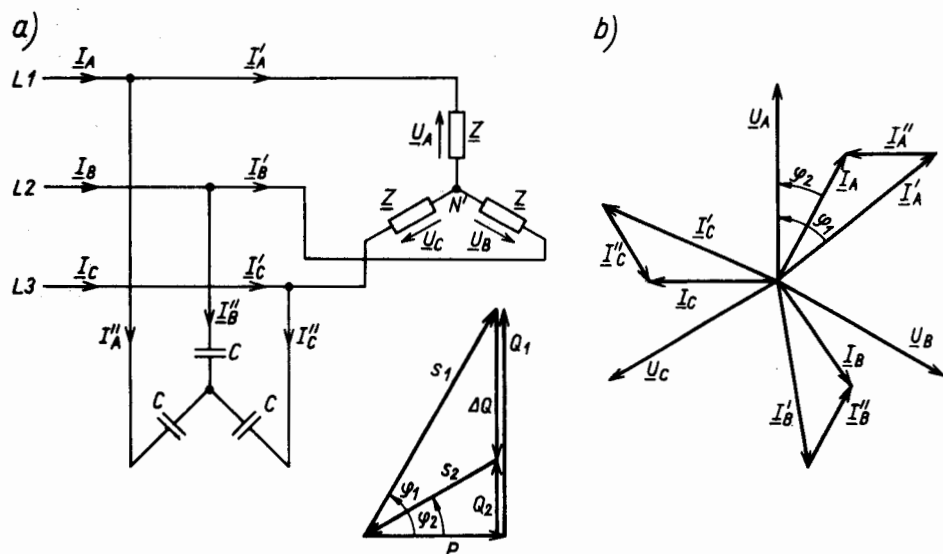
$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = -12,77 + j7,5 = 15e^{j150^\circ} \text{ A}$$

Wskazanie amperomierza A_N wynosi zatem $I_{AN} = 15 \text{ A}$.

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 4.19b.

4.4. Kompensacja mocy biernej

4.20. Do symetrycznej sieci trójfazowej (rys. 4.20a) o napięciu fazy A , $e_A = 220\sqrt{2} \sin(314t + 90^\circ)$ V przyłączono symetryczny odbiornik, połączony w gwiazdę, o współczynniku mocy $\cos \varphi_1 = 0,6$ oraz prądzie $I_f = 10$ A. Dobrać pojemność C każdej z faz baterii kondensatorów połączonych w gwiazdę, służących do kompensacji mocy biernej tak, aby współczynnik mocy układu wynosił $\cos \varphi_2 = 0,9$.



Rys. 4.20

ROZWIĄZANIE. Moc czynna i bierna pobierana przez odbiornik wynosi odpowiednio

$$P_1 = \sqrt{3} U_p I_f \cos \varphi_1 = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 10 \cdot 0,6 = 3949 \text{ W}$$

$$Q_1 = P_1 \tan \varphi_1 = 5265 \text{ var}$$

Moc bierna baterii kondensatorów jest równa

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = P_1 (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) = 3534 \text{ var}$$

W celu obliczenia pojemności baterii kondensatorów w jednej fazie korzystamy z zależności

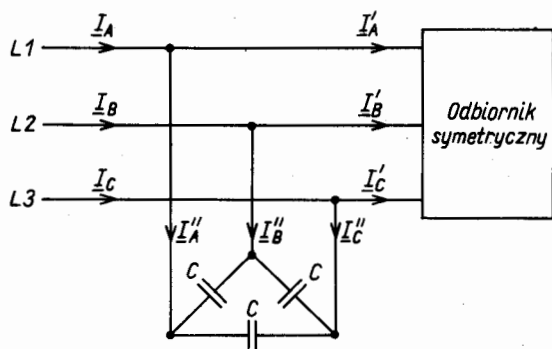
$$\frac{\Delta Q}{3} = \left(\frac{U_f}{X_C} \right)^2 X_C = \frac{U_p^2}{3 X_C} = \frac{U_p^2 \omega C}{3}$$

Zatem

$$C = \frac{\Delta Q}{\omega U_p^2} = \frac{P_1 (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)}{\omega U_p^2} = \frac{3534}{314 \cdot 380^2} = 78 \mu\text{F}$$

Na rysunku 4.20b pokazano wykres wektorowy układu, a na rys. 4.20c zamieszczono trójkąt mocy przed i po kompensacji. Kąt między napięciem i prądem przed kompensacją $\varphi_1 = 53^\circ$, a po kompensacji $\varphi_2 = 26^\circ$.

4.21. Generator symetryczny o napięciu fazowym $e_A = 220\sqrt{2} \sin(314t + 90^\circ)$ V zasila odbiornik symetryczny (rys. 4.21) połączony w gwiazdę. Odbiornik pobiera moc czynną $P = 5$ kW przy współczynniku mocy $\cos \varphi_1 = 0,8$. Jaka powinna być pojemność C baterii kondensatorów połączonych w trójkąt, służących do kompensacji mocy biernej (poprawy współczynnika mocy), aby współczynnik mocy układu wynosił $\cos \varphi_2 = 0,95$?



Rys. 4.21

ROZWIĄZANIE. Moc bierna baterii kondensatorów

$$\Delta Q = P(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) = 2150 \text{ var}$$

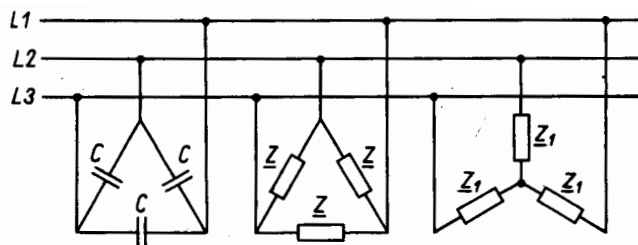
Reaktancję pojemnościową kondensatorów jednej fazy obliczamy z zależności

$$\frac{\Delta Q}{3} = \left(\frac{U_p}{X_C} \right)^2 X_C = \frac{U_p^2}{X_C} = U_p^2 \omega C = \frac{U_f^2 \omega C}{3}$$

Stąd

$$C = \frac{\Delta Q}{\omega U_f^2} = \frac{2150}{314 \cdot 220^2} = 14,1 \mu\text{F}$$

4.22. Generator symetryczny o napięciu międzyfazowym $U_p = 380$ V i częstotliwości $f = 50$ Hz zasila dwa symetryczne odbiorniki o charakterze indukcyjnym oraz baterię kondensatorów służącą do poprawy współczynnika mocy (rys. 4.22). Odbiornik połączony w trójkąt pobiera moc $P_\Delta = 200$ kW przy $\cos \varphi_1 = 0,8$, a odbiornik połączony w gwiazdę — moc $P_\star = 140$ kW przy $\cos \varphi_2 = 0,7$. Obliczyć pojemność baterii kondensatorów w każdej fazie, przy której współczynnik układu będzie równy $\cos \varphi = 1$.



Rys. 4.22

ROZWIĄZANIE. Moce pozorne poszczególnych odbiorników wynoszą

$$S_{\Delta} = P_{\Delta} \frac{1}{\cos \varphi_1} = 250 \text{ kV}\cdot\text{A}$$

$$S_{\lambda} = P_{\lambda} \frac{1}{\cos \varphi_2} = 200 \text{ kV}\cdot\text{A}$$

Moce bierne odbiorników są równe

$$Q_{\Delta} = \sqrt{S_{\Delta}^2 - P_{\Delta}^2} = 150 \text{ kvar}$$

$$Q_{\lambda} = \sqrt{S_{\lambda}^2 - P_{\lambda}^2} = 142,8 \text{ kvar}$$

Aby współczynnik mocy układu $\cos \varphi = 1$, moc bierna pojemnościowa baterii kondensatorów powinna być równa mocy biernej indukcyjnej odbiorników

$$Q_C = Q_L = Q_{\Delta} + Q_{\lambda} = 292,8 \text{ kvar}$$

Reaktancję pojemnościową baterii kondensatorów jednej fazy obliczamy z zależności

$$\frac{Q_C}{3} = \left(\frac{U_p}{X_C} \right)^2 X_C = \frac{U_p^2}{X_C}$$

stąd

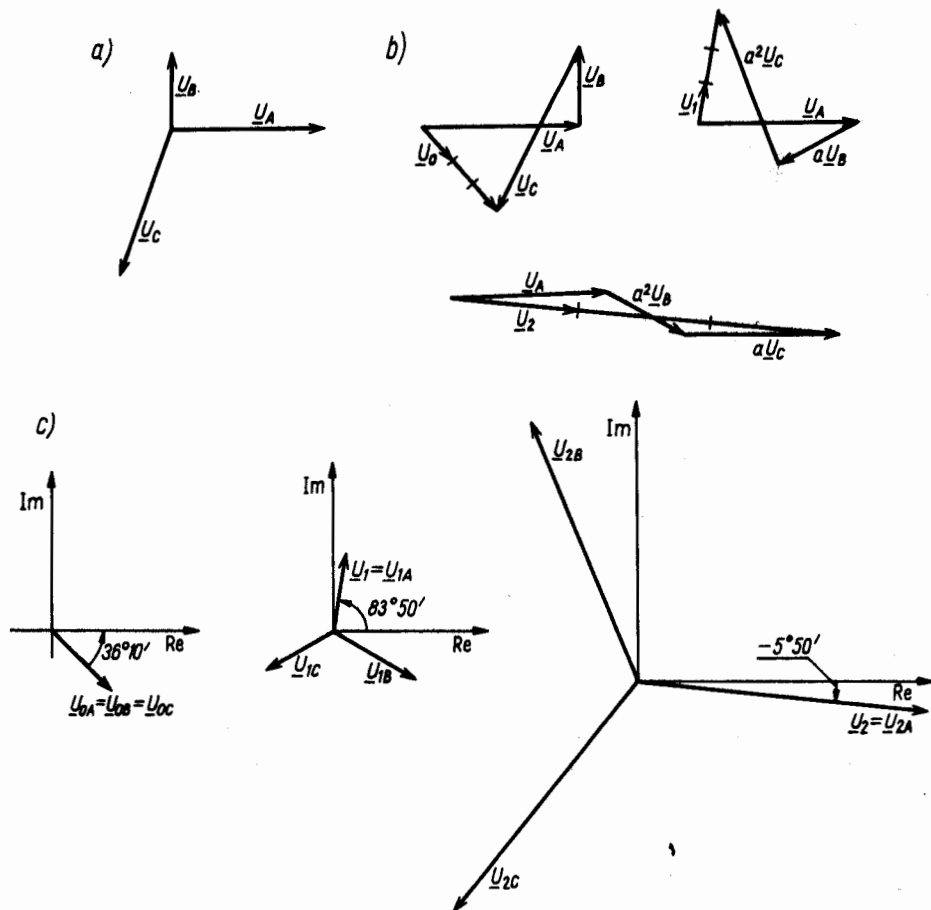
$$X_C = \frac{3 U_p^2}{Q_C} = \frac{3 \cdot 380^2}{292,8 \cdot 10^3} = 1,48 \Omega$$

Pojemność C jednej fazy

$$C = \frac{1}{X_C 2\pi f} = \frac{1}{1,48 \cdot 314} = 2151 \mu\text{F}$$

4.5. Składowe symetryczne

4.23. Wyznaczyć wykreślnie i analitycznie składowe symetryczne niesymetrycznego układu napięć przedstawionego na rys. 4.23a o wartościach skutecznych zespolonych: $\underline{U}_A = 100e^{j0^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_B = 50e^{j90^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_C = 100e^{-j120^\circ} \text{ V}$.



Rys. 4.23

ROZWIĄZANIE. Obliczamy składowe symetryczne napięć fazowych

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = \frac{1}{3}(100 + j50 - 50 - j50\sqrt{3}) = \\ &= \frac{1}{3}(50 - j36,6) = 20,65e^{-j36^\circ 10'} \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C) = \frac{1}{3}(100 + e^{j120^\circ} \cdot 50e^{j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 100e^{-j120^\circ}) = \\ &= \frac{1}{3}(100 - 25\sqrt{3} - j25 - 50 + j50\sqrt{3}) = (2,23 + j20,53) = 20,65e^{j83^\circ 50'} \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C) = \frac{1}{3}(100 + e^{-j120^\circ} \cdot 50e^{j90^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 100e^{-j120^\circ}) = \\ &= \frac{1}{3}(100 + 25\sqrt{3} - j25 + 100) = 81,1 - j8,33 = 81,52e^{-j5^\circ 50'} \text{ V}\end{aligned}$$

Otrzymane wartości napięcia układu zerowego $\underline{U}_0$, zgodnego $\underline{U}_1$ i przeciwnego $\underline{U}_2$ są napięciami fazy odniesienia (fazy A). Zgodnie z zasadą superpozycji zastępujemy niesymetryczne źródło napięcia przez trzy źródła symetryczne tworzące układ zerowy, zgodny i przeciwny napięć (rys. 4.23c).

Napięcia układu zerowego

$$\underline{U}_{0A} = \underline{U}_{0B} = \underline{U}_{0C} = 20,65e^{-j36^\circ 10'} \text{ V}$$

Napięcia układu zgodnego

$$\underline{U}_{1A} = 20,65e^{j83^\circ 50'} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{1B} = a^2 \underline{U}_{1A} = 20,65e^{-j36^\circ 10'} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{1C} = a \underline{U}_{1A} = 20,65e^{j203^\circ 50'} \text{ V}$$

Napięcia układu przeciwnego

$$\underline{U}_{2A} = 81,52e^{-j5^\circ 50'} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2B} = a \underline{U}_{2A} = 81,52e^{j114^\circ 10'} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2C} = a^2 \underline{U}_{2A} = 81,52e^{-j125^\circ 50'} \text{ V}$$

Na rysunku 4.23b wyznaczono wykreślnie składowe symetryczne $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$.

4.24. Składowe symetryczne zerowe, zgodne i przeciwne niesymetrycznego układu napięć fazowych wynoszą odpowiednio: $\underline{U}_0 = 50e^{-j60^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_1 = 100e^{j30^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_2 = 40e^{j60^\circ} \text{ V}$. Obliczyć napięcia fazowe układu zasilania.

ROZWIĄZANIE. Sumując napięcia tych samych faz układu zerowego, zgodnego i przeciwnego przedstawionych na rys. 4.24a, otrzymujemy

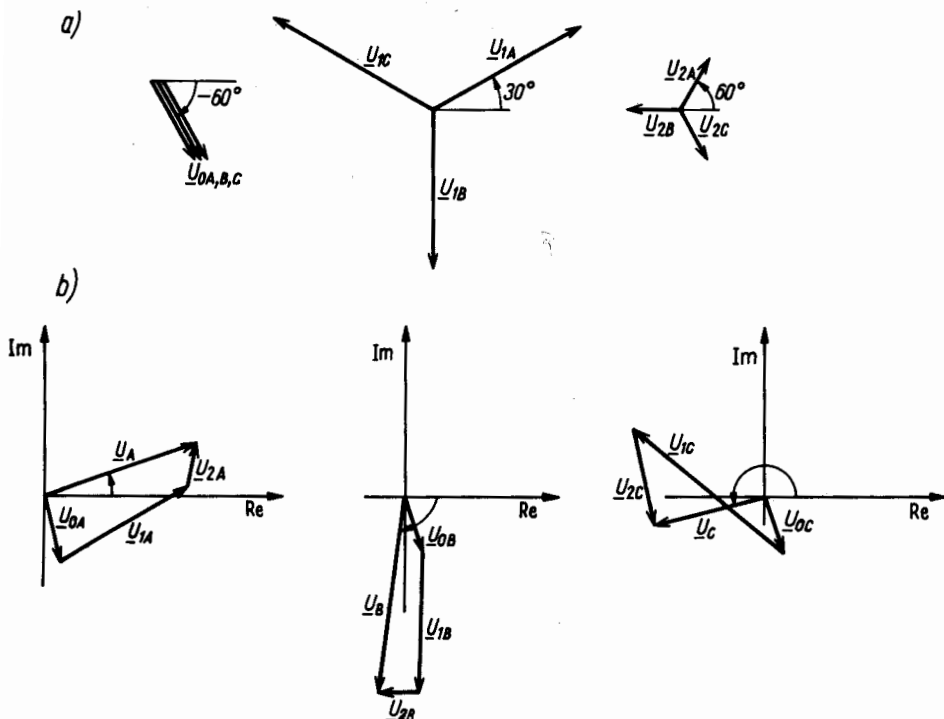
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{U}_{0A} + \underline{U}_{1A} + \underline{U}_{2A} \\ \underline{U}_{0B} + \underline{U}_{1B} + \underline{U}_{2B} \\ \underline{U}_{0C} + \underline{U}_{1C} + \underline{U}_{2C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} \\ 1 & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50e^{-j60^\circ} \\ 100e^{j30^\circ} \\ 40e^{j60^\circ} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_A = 50e^{-j60^\circ} + 100e^{j30^\circ} + 40e^{j60^\circ} = 131,6 + j41,33 = 138e^{j17^\circ 20'} \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_B &= 50e^{-j60^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 100e^{j30^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 40e^{j60^\circ} = \\ &= 50e^{-j60^\circ} + 100e^{-j90^\circ} + 40e^{j180^\circ} = -15 - j143,3 = 144e^{-j96^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

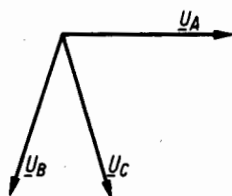
$$\underline{U}_C = 50e^{-j60^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 100e^{j30^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 40e^{j60^\circ} = -41,6 - j27,9 = 50e^{j214^\circ} \text{ V}$$

Na rysunku 4.24b graficznie wyznaczono napięcia fazowe $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$.



Rys. 4.24

4.25. Napięcia fazowe (rys. 4.25) trójfazowego źródła połączonego w gwiazdę tworzą układ: $\underline{U}_A = 240 \text{ V}$, $\underline{U}_B = 240e^{-j120^\circ} = (-120 - j\sqrt{3} \cdot 120) \text{ V}$, $\underline{U}_C = 240e^{-j60^\circ} = (120 - j\sqrt{3} \cdot 120) \text{ V}$. Do źródła tego przyłączono trójfazowy symetryczny odbiornik połączony w gwiazdę o rezystancji fazy $R = 20 \Omega$. Obliczyć prądy przewodowe dla dwóch wariantów: a) w układzie trójprzewodowym, b) w układzie czteroprzewodowym przy impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 0$. Dla obydwu wariantów obliczyć moc czynną pobieraną przez odbiornik.



Rys. 4.25

ROZWIĄZANIE

a) Układ bez przewodu neutralnego

Obliczamy składowe symetryczne napięć fazowych źródła

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3}(240 - 120 - j\sqrt{3} \cdot 120 + 120 - j\sqrt{3} \cdot 120) = \\ &= (80 - j\sqrt{3} \cdot 80) = 140e^{-j60^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3}(240 + 240e^{-j120^\circ} \cdot e^{j120^\circ} + 240e^{-j60^\circ} \cdot e^{-j120^\circ}) = 80e^{j0^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3}(240 + 240e^{-j120^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} + 240e^{-j60^\circ} \cdot e^{j120^\circ}) = \\ &= (80 + j\sqrt{3} \cdot 80) = 160e^{j60^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji zastępujemy niesymetryczne źródło napięcia przez trzy źródła symetryczne tworzące układ zerowy, zgodny i przeciwny, a następnie kolejno obliczamy rozpyływ prądów w tych trzech układach (przy $Z_N = \infty$). Jak wiadomo, w układzie trójprzewodowym składowa zerowa prądu nie występuje. Składowa zgodna prądu w fazach A, B i C

$$\underline{I}_{1A} = \frac{\underline{U}_1}{R} = \frac{80}{20} = 4e^{j0^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{1B} = a^2 \underline{I}_{1A} = 4e^{-j120^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{1C} = a \underline{I}_{1A} = 4e^{j120^\circ} \text{ A}$$

Składowa przeciwna prądu w fazach A, B i C

$$\underline{I}_{2A} = \frac{\underline{U}_2}{R} = \frac{80 + j\sqrt{3} \cdot 80}{20} = 8e^{j60^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{2B} = a \underline{I}_{2A} = 8e^{j180^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{2C} = a^2 \underline{I}_{2A} = 8e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

Prądy wypadkowe w fazach A, B i C

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{1A} + \underline{I}_{2A} = 4 + 8e^{j60^\circ} = (8 + j\sqrt{3} \cdot 4) = 10,58e^{j41^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{1B} + \underline{I}_{2B} = 4e^{-j120^\circ} + 8e^{j180^\circ} = (-10 - j\sqrt{3} \cdot 2) = 10,58e^{j199^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{1C} + \underline{I}_{2C} = 4e^{j120^\circ} + 8e^{-j60^\circ} = (2 - j\sqrt{3} \cdot 2) = 4e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

Łatwo sprawdzić, że $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

Moc czynna P jest sumą mocy od poszczególnych składowych symetrycznych

$$P_1 = 3 U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 3 \cdot 80 \cdot 4 \cos 0 = 960 \text{ W}$$

$$P_2 = 3 U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 3 \cdot 140 \cdot 8 \cos 0 = 3360 \text{ W}$$

zatem

$$P = P_1 + P_2 = 4320 \text{ W}$$

b) Układ z przewodem neutralnym

W rozpatrywanym przypadku przyjmujemy $\underline{Z}_N = 0$. Wobec tego składowa zerowa prądu w fazie A, B, C

$$\underline{I}_{0A} = \underline{I}_{0B} = \underline{I}_{0C} = \frac{U_0}{R} = \frac{80 - j\sqrt{3} \cdot 80}{20} = (4 - j\sqrt{3} \cdot 4) = 8e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

Do prądów $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ obliczonych w wariancie a) dodajemy w każdej fazie prąd układu zerowego, jednakowy w każdej fazie. Ostatecznie otrzymamy

$$\underline{I}_A = 8 + j\sqrt{3} \cdot 4 + 4 - j\sqrt{3} \cdot 4 = 12e^{j0^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = -10 - j\sqrt{3} \cdot 2 + 4 - j\sqrt{3} \cdot 4 = (-6 - j\sqrt{3} \cdot 6) = 12e^{-j120^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = 2 - j\sqrt{3} \cdot 2 + 4 - j\sqrt{3} \cdot 4 = (6 - j\sqrt{3} \cdot 6) = 12e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

Prąd w przewodzie neutralnym jest równy potrójnej wartości składowej zerowej prądu

$$\underline{I}_N = 3 \underline{I}_{0A} = (12 - j\sqrt{3} \cdot 12) = 24e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

Moc czynna od poszczególnych składowych symetrycznych

$$P_0 = 3 U_0 I_0 = 3 \cdot 140 \cdot 8 = 3360 \text{ W}$$

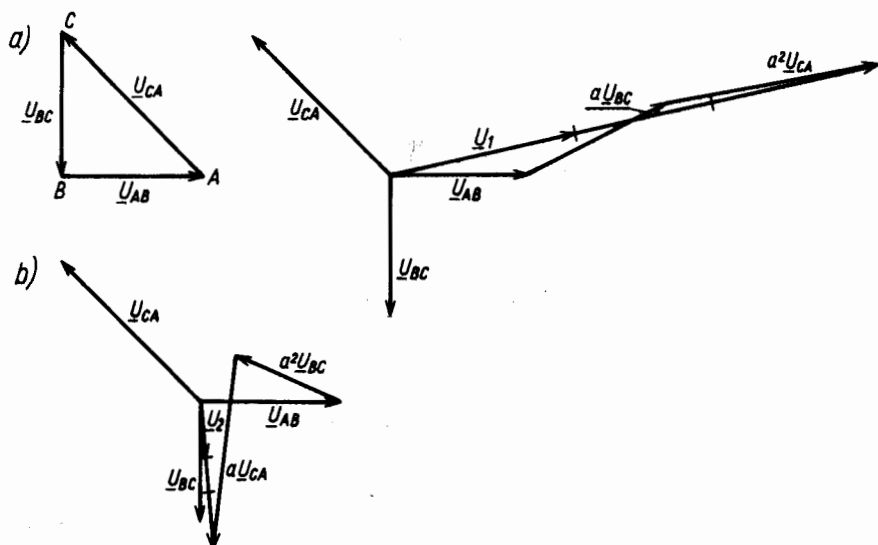
$$P_1 = 3 U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 960 \text{ W}$$

$$P_2 = 3 U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 3360 \text{ W}$$

Zatem moc czynna pobierana przez odbiornik

$$P = P_0 + P_1 + P_2 = 7680 \text{ W}$$

4.26. Napięcia międzyfazowe trójfazowego źródła połączonego w gwiazdę mają wartości: $\underline{U}_{AB} = 100 \text{ V}$; $\underline{U}_{BC} = 100e^{-90^\circ} \text{ V}$; $\underline{U}_{CA} = 100\sqrt{2} e^{j135^\circ} \text{ V}$. Do źródła tego przyłączono trójfazowy symetryczny odbiornik w układzie trójprzewodowym, połączony w gwiazdę, o rezystancji fazy $R = 10 \Omega$. Obliczyć składowe symetryczne napięcie międzyfazowych, napięcie fazowych źródła oraz prądy fazowe.



Rys. 4.26

ROZWIĄZANIE. W rozpatrywanym przypadku napięcia międzyfazowe tworzą trójkąt równoramienny (rys. 4.26a). Składowe symetryczne napięcie międzyfazowych obliczymy z zależności

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{0p} \\ \underline{U}_{1p} \\ \underline{U}_{2p} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{AB} \\ \underline{U}_{BC} \\ \underline{U}_{CA} \end{bmatrix}$$

Podstawiając dane, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \underline{U}_{0p} &= \frac{1}{3} (\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}) = \\ &= \frac{1}{3} (100 + 100e^{-j90^\circ} + 100\sqrt{2}e^{j135^\circ}) = 0 \end{aligned}$$

Napięcia międzyfazowe tworzą zawsze trójkąt zamknięty, tzn. $\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0$, zatem składowa zerowa układu napięć międzyfazowych $\underline{U}_{0p}$ jest zawsze równa zero. Składowe zgodna i przeciwna napięć międzyfazowych wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1p} &= \frac{1}{3} (100 + e^{j120^\circ} \cdot 100e^{-j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 100\sqrt{2}e^{j135^\circ}) = \\ &= (107,7 + j41,1) = 115,3e^{j21^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{2p} &= \frac{1}{3} (100 + e^{-j120^\circ} \cdot 100e^{-j90^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 100\sqrt{2}e^{j135^\circ}) = \\ &= (7,77 - j28,87) = 29,9e^{-j75^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

Składowe zgodne napięć międzyfazowych tworzą układ

$$\underline{U}_{1AB} = 115,3e^{j21^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{1BC} = 115,3e^{-j99^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{1CA} = 115,3e^{-j219^\circ} \text{ V}$$

Składowe przeciwne napięć międzyfazowych tworzą układ

$$\underline{U}_{2AB} = 29,9e^{-j75^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{2BC} = 29,9e^{j45^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{2CA} = 29,9e^{j165^\circ} \text{ V}$$

Na rysunku 4.26b wyznaczono wykreślnie składową zgodną i przeciwną napięć międzyfazowych.

Składową zgodną i przeciwną napięć fazowych można wyrazić w zależności od składowych zgodnej i przeciwnej napięć międzyfazowych (jak dla układów symetrycznych)

$$\underline{U}_{1f} = \frac{\underline{U}_{1p}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = \frac{115,3e^{j21^\circ}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = \frac{115,3}{\sqrt{3}} e^{-j9^\circ} = (65,7 - j10,4) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2f} = \frac{\underline{U}_{2p}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = \frac{29,9}{\sqrt{3}} e^{-j45^\circ} = (12,2 - j12,2) \text{ V}$$

Dla układu napięć międzyfazowych przedstawionych na rys. 4.26a możemy napięcia fazowe wybrać dowolnie. Jednak składowej zerowej napięć fazowych $\underline{U}_{0f}$ można nie wyznaczać, gdyż składowa zerowa prądów fazowych w układzie trójprzewodowym nie występuje.

Otrzymane wartości składowych symetrycznych napięć fazowych pozwalają na obliczenie składowych symetrycznych prądów fazowych, które wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}_0 = 0$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1f}}{R} = (6,57 - j1,04) = 6,65e^{-j9^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2f}}{R} = (1,22 - j1,22) = 1,72e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

Prądy fazowe obliczamy z zależności

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (7,79 - j2,26) = 8,42e^{-j5^\circ} \text{ A}$$

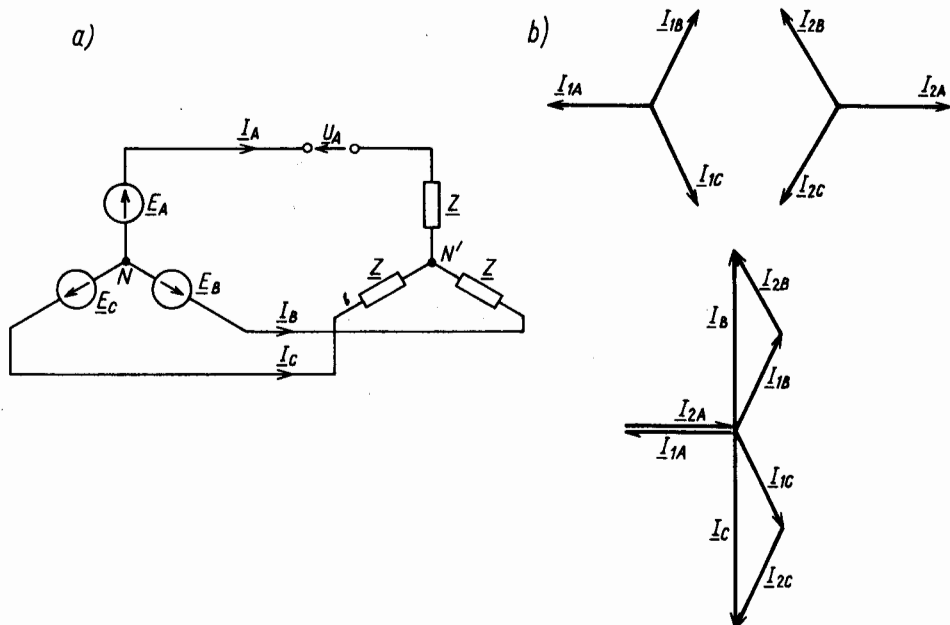
$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 = (-3,74 - j3,5) = 5,11e^{j223^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = (-4,05 + j5,76) = 7,04e^{j125^\circ} \text{ A}$$

Suma geometryczna prądów fazowych w punkcie neutralnym odbiornika

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$$

4.27. W trójfazowym układzie symetrycznym gwiazdowym trójprzewodowym wystąpiła przerwa w fazie A (rys. 4.27a). Obliczyć składowe symetryczne prądów fazowych, jeżeli prąd $\underline{I}_B = 6e^{j90^\circ}$ A.



Rys. 4.27

ROZWIĄZANIE. Po wystąpieniu przerwy w fazie A ($\underline{I}_A = 0$) tworzy się układ jednooczkowy, w którym $\underline{I}_B = -\underline{I}_C$, czyli $\underline{I}_C = 6e^{-j90^\circ}$ A. Składowa zerowa prądu fazowego $\underline{I}_0 = 0$.

Zatem składowe zgodna i przeciwna prądów fazowych są równe

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{3}(a \underline{I}_B + a^2 \underline{I}_C) = \frac{1}{3}(e^{j120^\circ} \cdot 6e^{j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 6e^{-j90^\circ}) = -2\sqrt{3} \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{3}(a^2 \underline{I}_B + a \underline{I}_C) = 2(e^{-j120^\circ} \cdot e^{j90^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot e^{-j90^\circ}) = 2\sqrt{3} \text{ A}$$

W metodzie składowych symetrycznych oblicza się nie wszystkie wielkości, lecz tylko wielkości odniesione do fazy podstawowej, którą jest faza A .

Zatem obliczone składowe, zgodna i przeciwna, tworzą następujące układy symetryczne kolejności zgodnej i przeciwej (rys. 4.27b):

$$\underline{I}_{1A} = 2\sqrt{3}e^{j180^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{2A} = 2\sqrt{3}e^{j0^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{1B} = 2\sqrt{3}e^{j60^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{2B} = 2\sqrt{3}e^{j120^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{1C} = 2\sqrt{3}e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{2C} = 2\sqrt{3}e^{-j120^\circ} \text{ A}$$

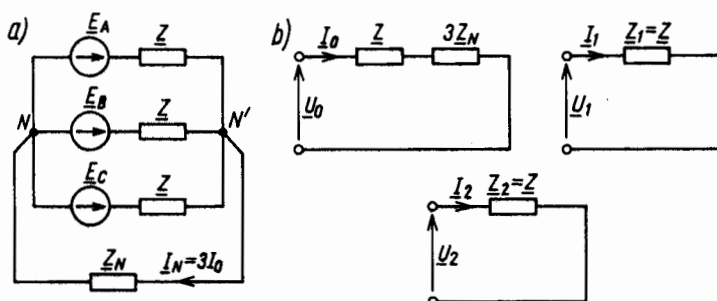
Sumując graficznie prądy układów symetrycznych, otrzymujemy wyjściowy układ prądów fazowych (rys. 4.27c).

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{1A} + \underline{I}_{2A} = 0$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{1B} + \underline{I}_{2B} = j6 \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{1C} + \underline{I}_{2C} = -j6 \text{ A}$$

4.28. Do niesymetrycznego źródła zasilania, którego napięcia fazowe wynoszą odpowiednio: $\underline{E}_A = 120 \text{ V}$, $\underline{E}_B = j120 \text{ V}$, $\underline{E}_C = -j120 \text{ V}$, przyłączono symetryczny odbiornik połączony w gwiazdę (rys. 4.28a) o impedancji każdej z faz $\underline{Z} = (20 + j20) \Omega$ i o impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = (2 + j2) \Omega$. Obliczyć składową zerową zgodną i przeciwną prądów fazowych.



Rys. 4.28

ROZWIĄZANIE. Składowe: zerowa, zgodna i przeciwna napięć fazowych wynoszą odpowiednio

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C) = \frac{1}{3}(120 + j120 - j120) = 40 \text{ V}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a \underline{E}_B + a^2 \underline{E}_C) = \frac{1}{3}(120 + 120e^{j210^\circ} + 120e^{-j210^\circ}) = -29,28 \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a^2 \underline{E}_B + a \underline{E}_C) = \frac{1}{3}(120 + 120e^{-j30^\circ} + 120e^{j30^\circ}) = 109,28 \text{ V}$$

Schematy dla poszczególnych składowych symetrycznych dla układu cztero-przewodowego przy $\underline{Z}_N \neq 0$ przedstawiono na rys. 4.28b. Składowe symetryczne prądów fazowych obliczamy z zależności

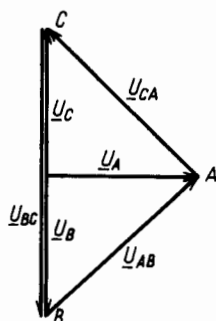
$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z} + 3\underline{Z}_N} = \frac{40}{20 + j20 + 6 + j6} = \frac{40}{26\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 1,09e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{29,28e^{j180^\circ}}{20\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 1,03e^{j135^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{109,28 e^{j0^\circ}}{20 \sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 3,87 e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

Należy zaznaczyć, że nie zawsze impedancja dla składowej zgodnej $\underline{Z}_1$ jest równa impedancji dla składowej przeciwnej $\underline{Z}_2$ (np. w maszynach elektrycznych impedancje te są różne).

4.29. Wartości skuteczne (moduły) napięć międzyfazowych na zaciskach odbiornika połączonego w gwiazdę w układzie trójprzewodowym wynoszą: $U_{AB} = 100\sqrt{2} \text{ V}$, $U_{BC} = 200 \text{ V}$, $U_{CA} = 100\sqrt{2} \text{ V}$. Impedancje odbiornika dla napięć i prądów kolejności zgodnej wynoszą $\underline{Z}_1 = (3 + j4) \Omega$, dla napięć i prądów kolejności przeciwnej $\underline{Z}_2 = (1 + j1,73) \Omega$. Obliczyć prądy fazowe.



Rys. 4.29

ROZWIĄZANIE. Układ napięć międzyfazowych tworzy trójkąt równoramienny. Wybór napięć fazowych dla tych napięć nie wpływa na wartości składowych symetrycznych kolejności zgodnej i przeciwnej, ma natomiast wpływ na wartość składowej symetrycznej kolejności zerowej. W układzie trójprzewodowym prądy kolejności zerowej nie występują, zatem napięcia fazowe można przyjąć dowolnie. Przyjęty układ napięć międzyfazowych i fazowych przedstawiono na rys. 4.29

$$\underline{U}_A = 100 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{AB} = 100\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_B = -j100 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{BC} = 200 e^{-j90^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = j100 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{CA} = 100\sqrt{2} e^{j135^\circ} \text{ V}$$

Składowe symetryczne napięć fazowych odbiornika wynoszą

$$\underline{U}_{0f} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = \frac{1}{3}(100 - j100 + j100) = \frac{100}{3} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{1f} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a \underline{U}_B + a^2 \underline{U}_C) = \frac{1}{3}(100 + 100 e^{j30^\circ} + 100 e^{-j30^\circ}) = 91 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2f} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a^2 \underline{U}_B + a \underline{U}_C) = \frac{1}{3}(100 + 100 e^{-j210^\circ} + 100 e^{j210^\circ}) = -24,4 \text{ V}$$

Obliczone wielkości są odniesione do fazy podstawowej, którą jest faza A.

Należy podkreślić, że składową zgodną i przeciwną napięć fazowych można również obliczyć za pomocą składowej zgodnej i przeciwnej napięć międzyfazowych. Składowe zgodna i przeciwna napięć międzyfazowych wynoszą

$$\begin{aligned}\underline{U}_{1p} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{AB} + a \underline{U}_{BC} + a^2 \underline{U}_{CA}) = \\ &= \frac{1}{3}(100\sqrt{2}e^{j45^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 200e^{-j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 100\sqrt{2}e^{j135^\circ}) = \\ &= 136,6 + j78,9 = 157,6e^{j30^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{2p} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{AB} + a^2 \underline{U}_{BC} + a \underline{U}_{CA}) = \\ &= \frac{1}{3}(100\sqrt{2}e^{j45^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 200e^{-j90^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 100\sqrt{2}e^{j135^\circ}) = \\ &= -36,6 + j21,13 = 42,26e^{j150^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

Składowe zgodna i przeciwna napięć fazowych wynoszą

$$\begin{aligned}\underline{U}_{1f} &= \frac{\underline{U}_{1p}}{\sqrt{3}}e^{-j30^\circ} = \frac{157,6e^{j30^\circ}}{\sqrt{3}}e^{-j30^\circ} = 91 \text{ V} \\ \underline{U}_{2f} &= \frac{\underline{U}_{2p}}{\sqrt{3}}e^{j30^\circ} = \frac{42,26e^{j150^\circ}}{\sqrt{3}}e^{j30^\circ} = -24,4 \text{ V}\end{aligned}$$

Dla składowych symetrycznych układy kolejności zgodnej i przeciwnej są symetryczne. Składowa zerowa prądu w układzie trójprzewodowym jest równa zeru.

Składowe zgodne prądów w fazach A, B, C wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned}\underline{I}_{1A} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{91e^{j0^\circ}}{3 + j4} = 18,2e^{-j53^\circ} \text{ A} \\ \underline{I}_{1B} &= a^2 \underline{I}_{1A} = 18,2e^{-j173^\circ} \text{ A} \\ \underline{I}_{1C} &= a \underline{I}_{1A} = 18,2e^{j67^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

Składowe przeciwne prądów w fazach A, B, C wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned}\underline{I}_{2A} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{24,4e^{j180^\circ}}{1 + j1,73} = 12,2e^{j120^\circ} \text{ A} \\ \underline{I}_{2B} &= a \underline{I}_{2A} = 12,2e^{j240^\circ} \text{ A} \\ \underline{I}_{2C} &= a^2 \underline{I}_{2A} = 12,2e^{j0^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

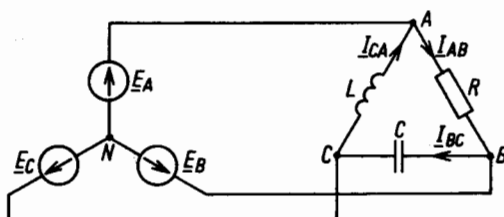
Prądy wypadkowe w fazach A , B , C

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{1A} + \underline{I}_{2A} = 18,2e^{-j53^\circ} + 12,2e^{j120^\circ} = (4,85 - j3,94) = 6,25e^{-j39^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{1B} + \underline{I}_{2B} = 18,2e^{-j173^\circ} + 12,2e^{-j120^\circ} = (-24,15 - j12,8) = 27,33e^{j208^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{1C} + \underline{I}_{2C} = 18,2e^{j67^\circ} + 12,2e^{j0^\circ} = (19,3 + j16,74) = 25,55e^{j41^\circ} \text{ A}$$

4.30. Dla obwodu przedstawionego na rys. 4.30 obliczyć składowe zerowe prądów fazowych i przewodowych. Do symetrycznego źródła o napięciu fazy A , $\underline{E}_A = j220 \text{ V}$, jest przyłączony odbiornik połączony w trójkąt o parametrach $R = X_L = X_C = 100 \Omega$.



Rys. 4.30

ROZWIĄZANIE. Napięcia międzyfazowe źródła zasilania są napięciami fazowymi odbiornika

$$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_{AB} = 220\sqrt{3}e^{j120^\circ} = 380e^{j120^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{E}_{BC} = 380e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{E}_{CA} = 380e^{-j120^\circ} \text{ V}$$

Prądy fazowe odbiornika wynoszą

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{380e^{j120^\circ}}{100e^{j0^\circ}} = 3,8e^{j120^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{380e^{j0^\circ}}{100e^{-j90^\circ}} = 3,8e^{j90^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{380e^{-j120^\circ}}{100e^{j90^\circ}} = 3,8e^{-j210^\circ} \text{ A}$$

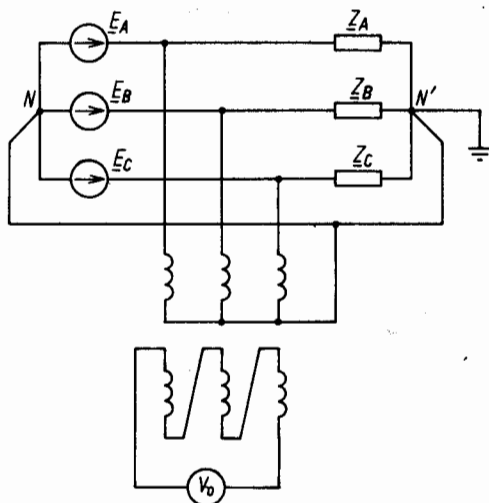
Składowa zerowa prądów fazowych

$$\begin{aligned} \underline{I}_0 &= \frac{1}{3}(\underline{I}_{AC} + \underline{I}_{BC} + \underline{I}_{CA}) = \frac{1}{3}(3,8e^{j120^\circ} + 3,8e^{j90^\circ} + 3,8e^{-j210^\circ}) = \\ &= (-1,73 + j3) \text{ A} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{0AB} = \underline{I}_{0BC} = \underline{I}_{0CA} = (-1,73 + j3) \text{ A}$$

W odbiorniku niesymetrycznym połączonym w trójkąt składowe zerowe prądów fazowych „krąży” wewnątrz tego odbiornika. Składowa zerowa prądów przewodowych jest równa zero.

4.31. Obliczyć wskazanie woltomierza V_0 w obwodzie przedstawionym na rys. 4.31, jeżeli przekładnia przekładników napięciowych wynosi 1000 V/100 V.



Rys. 4.31

Obliczenia przeprowadzić dla dwóch wariantów:

- $\underline{E}_A = 220e^{j0^\circ}$ V, $\underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A$, $\underline{E}_C = a \underline{E}_A$;
- $\underline{E}_A = 220e^{j0^\circ}$ V, $\underline{E}_B = j220$ V, $\underline{E}_C = -j220$ V, $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = j100 \Omega$.

ROZWIĄZANIE. Na rysunku 4.31 jest przedstawiony filtr składowej zerowej napięcia fazowego. Uzwojenie pierwotne filtru jest połączone w gwiazdę z uziemionym punktem neutralnym, a uzwojenie wtórne — w otwarty trójkąt. W związku z tym woltomierz mierzy potrójną wartość składowej zerowej napięcia fazowego z uwzględnieniem przekładni.

a) Napięcia fazowe tworzą symetryczną gwiazdę, zatem składowa zerowa tych napięć jest równa zero

$$\underline{U}_{V0} = \frac{1}{3} \cdot 22(1 + a^2 + a) = 0$$

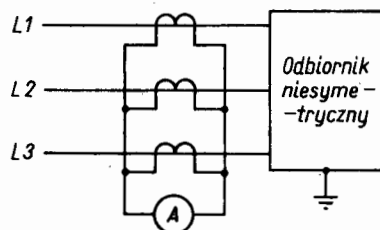
b) Napięcia fazowe tworzą układ niesymetryczny i składowa zerowa tych napięć wynosi

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3}(22 + j22 - j22) = \frac{22}{3} \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza wynosi

$$\underline{U}_{V0} = 3 \cdot \frac{22}{3} = 22 \text{ V}$$

4.32. Obliczyć składową zerową prądów fazowych w układzie przedstawionym na rys. 4.32, jeżeli przekładnia przekładników prądowych wynosi 20 A/1 A, a wskazanie amperomierza $I = 0,6$ A.



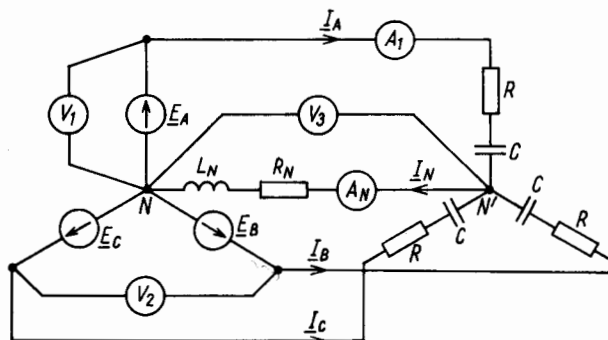
Rys. 4.32

ROZWIĄZANIE. W układzie przedstawionym na rys. 4.32 przez amperomierz płynie suma prądów transformowanych przez przekładniki prądowe połączone równolegle. Suma składowych zgodnych i przeciwnych prądów fazowych jest równa zero. Przez amperomierz płynie zatem potrójna wartość składowej zerowej prądu fazowego. Uwzględniając przekładnię k przekładników prądowych, składowa zerowa prądów fazowych wynosi

$$I_{0f} = \frac{I}{3} k = \frac{0,6}{3} \cdot 20 = 4 \text{ A}$$

4.6. Wyższe harmoniczne w układach trójfazowych

4.33. Symetryczne źródło zasilania o napięciu odkształconym fazy A, $e_A = [20 + 200\sqrt{2}\sin\omega_1 t + 100\sqrt{2}\sin(3\omega_1 t + 90^\circ) + 60\sqrt{2}\sin(5\omega_1 t + 90^\circ) + 40\sqrt{2}\sin(9\omega_1 t + 45^\circ)]$ V zasila odbiornik symetryczny połączony w gwiazdę, o impedancji każdej z faz dla pierwszej harmonicznej $\underline{Z}_1 = (10 - j30) \Omega$ oraz impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_{N1} = (5 + j2) \Omega$ (rys. 4.33). Obliczyć wskazania amperomierzy i woltomierzy.



Rys. 4.33

ROZWIĄZANIE. Wartości chwilowe napięć fazowych źródła zasilania

$$e_A(t) = [20 + 200\sqrt{2} \sin \omega_1 t + 100\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 90^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(5\omega_1 t + 90^\circ) + 40\sqrt{2} \sin(9\omega_1 t + 45^\circ)] \text{ V}$$

$$e_B(t) = [20 + 200\sqrt{2} \sin(\omega_1 t - 120^\circ) + 100\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 90^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(5\omega_1 t + 210^\circ) + 40\sqrt{2} \sin(9\omega_1 t + 45^\circ)] \text{ V}$$

$$e_C(t) = [20 + 200\sqrt{2} \sin(\omega_1 t + 120^\circ) + 100\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 90^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(5\omega_1 t - 30^\circ) + 40\sqrt{2} \sin(9\omega_1 t + 45^\circ)] \text{ V}$$

Wartości chwilowe napięć międzyfazowych

$$e_{AB}(t) = 200\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \sin(\omega_1 t + 30^\circ) + 60\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \sin(5\omega_1 t + 60^\circ) \text{ V}$$

$$e_{BC}(t) = 200\sqrt{6} \sin(\omega_1 t - 90^\circ) + 60\sqrt{6} \sin(5\omega_1 t + 180^\circ) \text{ V}$$

$$e_{CA}(t) = 200\sqrt{6} \sin(\omega_1 t - 210^\circ) + 60\sqrt{6} \sin(5\omega_1 t + 300^\circ) \text{ V}$$

Impedancje odbiornika oraz przewodu neutralnego dla poszczególnych harmonicznich wynoszą odpowiednio

$$\underline{Z}_1 = (10 - j30) \Omega$$

$$\underline{Z}_{N1} = (5 + j2) \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = (10 - j10) \Omega$$

$$\underline{Z}_{N3} = (5 + j6) \Omega$$

$$\underline{Z}_5 = (10 - j6) \Omega$$

$$\underline{Z}_{N5} = (5 + j10) \Omega$$

$$\underline{Z}_9 = (10 - j3,3) \Omega$$

$$\underline{Z}_{N9} = (5 + j18) \Omega$$

Prąd od składowej stałej nie popłynie ze względu na obecność kondensatora w odbiorniku.

Prądy fazowe od poszczególnych harmonicznich:

— od pierwszej harmonicznej

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{200}{(10 - j30)} = 6,3e^{j71^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{B1} = a^2 \underline{I}_{A1} = 6,3e^{-j49^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{C1} = a \underline{I}_{A1} = 6,3e^{j191^\circ} \text{ A}$$

— od trzeciej harmonicznej

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{A3} = \underline{I}_{B3} = \underline{I}_{C3} = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3 + 3\underline{Z}_{N3}} = \frac{j100}{25 + j8} = 3,8e^{j72^\circ} \text{ A}$$

— od piątej harmonicznej

$$\underline{I}_{A5} = \frac{\underline{E}_5}{\underline{Z}_5} = \frac{j60}{10 - j6} = 5,13e^{j121^\circ}$$

$$\underline{I}_{B5} = a \underline{I}_{A5} = 5,13e^{j241^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{C5} = a^2 \underline{I}_{A5} = 5,13e^{j1^\circ} \text{ A}$$

— od dziewiątej harmonicznej

$$\underline{I}_9 = \underline{I}_{A9} = \underline{I}_{B9} = \underline{I}_{C9} = \frac{\underline{E}_9}{\underline{Z}_9 + 3\underline{Z}_{N9}} = \frac{40e^{j45^\circ}}{25 + j50,7} = 0,7e^{-j8^\circ} \text{ A}$$

Ze względu na symetrię odbiornika, prąd w przewodzie neutralnym od pierwszej i piątej harmonicznej jest równy zeru. W przewodzie neutralnym płyną prądy od trzeciej i dziewiątej harmonicznej, które tworzą układy symetryczne zerowe

$$\underline{I}_{N3} = 3 \underline{I}_3 = \frac{3 \underline{E}_3}{\underline{Z}_3 + 3\underline{Z}_{N3}} = 11,4e^{j72^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{N9} = 3 \underline{I}_9 = \frac{3 \underline{E}_9}{\underline{Z}_9 + 3\underline{Z}_{N9}} = 2,1e^{-j8^\circ} \text{ A}$$

Amperomierz A_1 mierzy wartość skuteczną prądu fazowego I_A

$$I_A = \sqrt{I_{A1}^2 + I_{A3}^2 + I_{A5}^2 + I_{A9}^2} = \sqrt{6,3^2 + 3,8^2 + 5,13^2 + 0,7^2} = 9 \text{ A}$$

Wartości skuteczne prądów w poszczególnych fazach

$$I_B = I_C = I_A = 9 \text{ A}$$

Amperomierz A_N mierzy wartość skuteczną prądu w przewodzie neutralnym

$$I_N = \sqrt{I_{N3}^2 + I_{N9}^2} = 3 \sqrt{I_3^2 + I_9^2} = \sqrt{11,4^2 + 2,1^2} = 11,6 \text{ A}$$

Woltomierz V_1 mierzy wartość skuteczną napięcia fazowego

$$\begin{aligned} U_f = U_{V1} &= \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_9^2} = \\ &= \sqrt{20^2 + 200^2 + 100^2 + 60^2 + 40^2} = 235 \text{ V} \end{aligned}$$

Woltomierz V_2 mierzy wartość skuteczną napięcia międzyfazowego

$$\begin{aligned} U_p = U_{V2} &= \sqrt{(U_1\sqrt{3})^2 + (U_5\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_1^2 + U_5^2} = \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{200^2 + 60^2} = 361 \text{ V} \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że $U_p < \sqrt{3} U_f$.

Woltomierz V_3 mierzy spadek napięcia na impedancji $\underline{Z}_N$ od trzeciej i dziewiątej harmonicznej

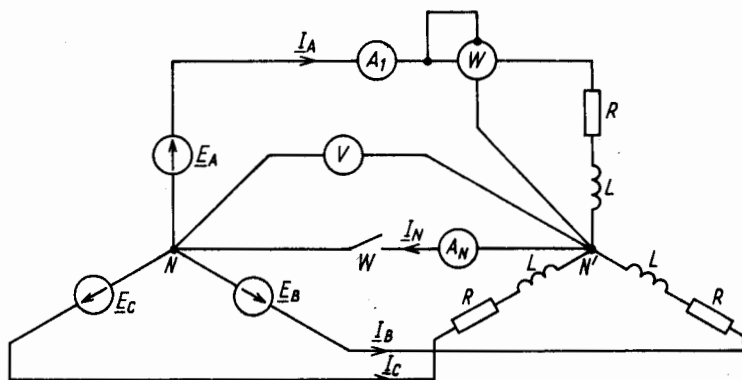
$$\underline{U}'_{V3} = \underline{U}'_N = \underline{Z}_{N3} \underline{I}_{N3} = 7,8e^{j50^\circ} \cdot 11,4e^{j72^\circ} = 89e^{j122^\circ} \text{ V, stąd } U'_{V3} = 89 \text{ V}$$

$$\underline{U}''_{V3} = \underline{U}''_N = \underline{Z}_{N9} \underline{I}_{N9} = 18,68e^{j74^\circ} \cdot 2,1e^{-j8^\circ} = 39,2e^{j66^\circ} \text{ V, stąd } U''_{V3} = 39,2 \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza V_3 wynosi

$$U_{V3} = U_N = \sqrt{89^2 + 39,2^2} = 97,25 \text{ V}$$

4.34. Symetryczne źródło napięcia odkształconego o napięciu fazy A , $e_A = [10 + 200\sqrt{2}\sin\omega_1 t + 80\sqrt{2}\sin 3\omega_1 t + 60\sqrt{2}\sin 5\omega_1 t]$ V zasila symetryczny odbiornik połączony w gwiazdę (rys. 4.34) o impedancji każdej z faz dla pierwszej harmonicznej $\underline{Z}_1 = (20 + j10)\Omega$. Obliczyć wskazania przyrządów oraz moc czynną odbiornika dla dwóch wariantów: a) układu trójprzewodowego, b) układu czteroprzewodowego o impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 0$.



Rys. 4.34

ROZWIĄZANIE

a) Układ bez przewodu neutralnego

Ze względu na brak przewodu neutralnego, w obwodzie nie popłyną prądy od składowej stałej i od trzeciej harmonicznej. Moduły impedancji dla pierwszej harmonicznej i piątej harmonicznej wynoszą

$$Z_1 = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,4 \Omega; \quad \varphi_1 = 26^\circ 30'$$

$$Z_5 = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53,5 \Omega; \quad \varphi_5 = 68^\circ 10'$$

Wartości skuteczne prądów poszczególnych harmonicznych

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{200}{22,4} = 8,93 \text{ A}; \quad I_5 = \frac{U_5}{Z_5} = \frac{60}{53,5} = 1,12 \text{ A}$$

Amperomierz A_1 wskaże wartość skuteczną prądu przewodowego I_A

$$I_A = \sqrt{I_1^2 + I_5^2} = \sqrt{8,93^2 + 1,12^2} = 9 \text{ A}$$

Napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika jest wywołane przez harmoniczne rzędu $3k$ ($k = 0, 1, 3, \dots$)

$$U_V = U_{NN'} = \sqrt{U_0^2 + U_3^2} = \sqrt{10^2 + 80^2} = 80,6 \text{ V}$$

Wskazanie watomierza

$$\begin{aligned} P_w &= U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 = \\ &= 200 \cdot 8,93 \cos 26^\circ 30' + 60 \cdot 1,12 \cos 68^\circ 10' = 1620 \text{ W} \end{aligned}$$

Moc mierzona przez watomierz jest mocą czynną, która wydzieli się na rezystancji R w fazie A

$$P_R = R I_A^2 = 20 \cdot 9^2 = 1620 \text{ W}$$

Moc czynna symetrycznego odbiornika połączonego w gwiazdę

$$P = 3 P_R = 3 U_1 I_1 \cos \varphi_1 + 3 U_5 I_5 \cos \varphi_5 = 4860 \text{ W}$$

b) Układ z przewodem neutralnym ($\underline{Z}_N = 0$)

W obwodzie popłyną prądy od składowej stałej i od poszczególnych harmonicznych o wartościach skutecznych

$$I_0 = I_{A0} = I_{B0} = I_{C0} = \frac{E_0}{R} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ A}$$

$$I_1 = 8,93 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{A3} = I_{B3} = I_{C3} = \frac{E_3}{Z_3} = \frac{80}{\sqrt{20^2 + 30^2}} = 2,22 \text{ A}$$

$$I_5 = 1,12 \text{ A}$$

Wartość skuteczna prądu fazowego I_{fA} , którą mierzy amperomierz A_1 , wynosi

$$I_{fA} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{0,5^2 + 8,93^2 + 2,22^2 + 1,12^2} = 9,28 \text{ A}$$

Prąd w przewodzie neutralnym pojawi się od składowej stałej I_{N0} i od trzeciej harmonicznej I_{N3}

$$I_{N0} = 3 I_0 = 1,5 \text{ A}$$

$$I_{N3} = 3 I_3 = 6,66 \text{ A}$$

Wskazanie amperomierza A_N

$$I_N = \sqrt{I_{N0}^2 + I_{N3}^2} = \sqrt{1,5^2 + 6,66^2} = 6,82 \text{ A}$$

Napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika przy $\underline{Z}_N = 0$ jest równe zero.

Moc jaką mierzy watomierz jest równa

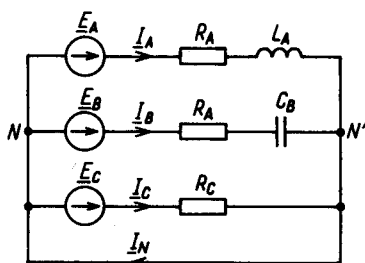
$$\begin{aligned} P_W &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 = R I_{fA}^2 = \\ &= 20 \cdot 9,28^2 = 1722 \text{ W} \end{aligned}$$

4.35. W obwodzie przedstawionym na rys. 4.35 napięcie źródła jest odkształcone, przy czym wartość chwilowa napięcia fazy A źródła wynosi

$$e_A = [200 \sqrt{2} \sin \omega_1 t + 100 \sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 90^\circ)] \text{ V.}$$

Odbiornik jest niesymetryczny, a impedancje poszczególnych faz dla pierwszej harmonicznej wynoszą: $\underline{Z}_{A1} = (20 + j20) \Omega$, $\underline{Z}_{B1} = (10 - j15) \Omega$, $\underline{Z}_{C1} = 50 \Omega$. Impedancja przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 0$. Obliczyć wartości skuteczne

prądów fazowych oraz wartość skuteczną i wartość chwilową prądu w przewodzie neutralnym.



Rys. 4.35

ROZWIĄZANIE. Punkt neutralny odbiornika i źródła są połączone bezimpedancyjnie, zatem napięcie $\underline{U}_{NN'} = 0$ i mimo że odbiornik jest niesymetryczny, to napięcia fazowe odbiornika są równe napięciom fazowym źródła. Prądy fazowe odbiornika od pierwszej harmonicznej są równe

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_{A1}} = \frac{200e^{j0^\circ}}{20 + j20} = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = (5 - j5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{B1} = \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{Z}_{B1}} = \frac{200e^{-j120^\circ}}{10 - j15} = 11,1e^{-j64^\circ} = (5 - j10) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{C1} = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{200e^{j120^\circ}}{50} = 4e^{j120^\circ} = (-2 + j2\sqrt{3}) \text{ A}$$

Prąd w przewodzie neutralnym od pierwszej harmonicznej dla odbiornika niesymetrycznego jest sumą wektorową prądów fazowych

$$\underline{I}_{N1} = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{C1} = (8 - j11,54) = 14e^{-j55^\circ} \text{ A}$$

Prądy fazowe i prąd w przewodzie neutralnym od trzeciej harmonicznej wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}_{A3} = \frac{\underline{U}_{A3}}{\underline{Z}_{A3}} = \frac{100e^{j90^\circ}}{20 + j60} = 1,58e^{j18^\circ} = (1,5 + j0,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{B3} = \frac{\underline{U}_{B3}}{\underline{Z}_{B3}} = \frac{100e^{j90^\circ}}{10 - j5} = 8,94e^{j117^\circ} = (-4 + j8) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{C3} = \frac{\underline{U}_{C3}}{\underline{Z}_{C3}} = \frac{100e^{j90^\circ}}{50} = 2e^{j90^\circ} = j2 \text{ A}$$

$$\underline{I}_{N3} = \underline{I}_{A3} + \underline{I}_{B3} + \underline{I}_{C3} = (-2,5 + j10,5) = 10,8e^{j103^\circ} \text{ A}$$

Wartości skuteczne prądów fazowych i prądu w przewodzie neutralnym wynoszą odpowiednio

$$I_A = \sqrt{I_{A1}^2 + I_{A3}^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 1,58^2} = 7,24 \text{ A}$$

$$I_B = \sqrt{I_{B1}^2 + I_{B3}^2} = \sqrt{11,1^2 + 8,94^2} = 14,25 \text{ A}$$

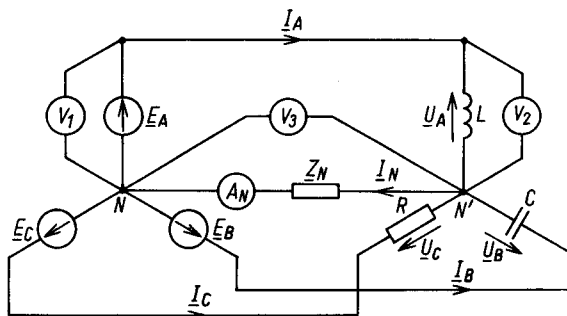
$$I_C = \sqrt{I_{C1}^2 + I_{C3}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,47 \text{ A}$$

$$I_N = \sqrt{I_{N1}^2 + I_{N3}^2} = \sqrt{14^2 + 10,8^2} = 17,68 \text{ A}$$

Postać czasowa prądu w przewodzie neutralnym

$$i_N(t) = [14\sqrt{2} \sin(\omega_1 t - 55^\circ) + 10,8\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 103^\circ)] \text{ A}$$

4.36. Źródło symetryczne o napięciu odkształconym fazy A , $e_A = [200\sqrt{2} \sin \omega_1 t + 40\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 90^\circ)] \text{ V}$ zasila niesymetryczny odbiornik, połączony w gwiazdę (rys. 4.36) w układzie czteroprzewodowym o impedancji przewodu neutralnego $Z_N = 10/3 \Omega$. Reaktancje dla pierwszej harmonicznej wynoszą: $X_{L1} = X_{C1} = 10 \Omega$, natomiast $R = 10 \Omega$. Obliczyć wskazania woltomierzy oraz amperomierza.



Rys. 4.36

ROZWIĄZANIE. Odbiornik jest niesymetryczny, połączony ze źródłem w układzie czteroprzewodowym o impedancji przewodu neutralnego $Z_N \neq 0$, zatem napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika $\underline{U}_N \neq 0$ zarówno dla pierwszej, jak i dla trzeciej harmonicznej.

Obliczamy rozpyływ prądów od pierwszej harmonicznej.

Wyznaczamy napięcie

$$\begin{aligned} \underline{U}_{N1} &= \frac{\underline{Y}_{A1} \underline{E}_{A1} + \underline{Y}_{B1} \underline{E}_{B1} + \underline{Y}_{C1} \underline{E}_{C1}}{\underline{Y}_{A1} + \underline{Y}_{B1} + \underline{Y}_{C1} + \underline{Y}_{N1}} = \\ &= \frac{200(0,1e^{-j90^\circ} + 0,1e^{j90^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} + 0,1e^{j120^\circ})}{0,1e^{-j90^\circ} + 0,1e^{j90^\circ} + 0,1 + 0,3} = (18,3 - j31,6) = 36,6e^{-j60^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

Napięcia fazowe odbiornika są równe odpowiednio

$$\underline{U}_{A1} = \underline{E}_{A1} - \underline{U}_{N1} = 200 - 18,3 + j31,6 = (181,7 + j31,6) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{B1} = \underline{E}_{B1} - \underline{U}_{N1} = (-118,3 - j141,6) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{C1} = \underline{E}_{C1} - \underline{U}_{N1} = (-118,3 + j204,8) \text{ V}$$

Prądy fazowe wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}_{A1} = \underline{Y}_{A1} \underline{U}_{A1} = (-j0,1)(181,7 + j31,6) = (3,16 - j18,17) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{B1} = \underline{Y}_{B1} \underline{U}_{B1} = (j0,1)(-118,3 - j141,6) = (14,16 - j11,83) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{C1} = \underline{Y}_{C1} \underline{U}_{C1} = (0,1)(-118,3 + j204,8) = (-11,83 + j20,48) \text{ A}$$

Prąd w przewodzie neutralnym

$$\underline{I}_{N1} = \underline{Y}_{N1} \underline{U}_{N1} = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{C1} = (5,49 - j9,52) = 11e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

Obliczamy rozptył prądów od trzeciej harmonicznej.

Reaktancje i admitancje w poszczególnych fazach dla trzeciej harmonicznej wynoszą odpowiednio

$$X_{L3} = 30 \Omega, \text{ stąd } \underline{Y}_{A3} = \frac{1}{jX_{L3}} = \frac{1}{j30} = \frac{1}{30}e^{-j90^\circ} \text{ S}$$

$$X_{C3} = \frac{10}{3} \Omega, \text{ stąd } \underline{Y}_{B3} = \frac{1}{-jX_{C3}} = \frac{3}{10}e^{j90^\circ} \text{ S}$$

$$R = 10 \Omega, \text{ stąd } \underline{Y}_{C3} = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} \text{ S}$$

Obliczamy napięcie

$$\begin{aligned} \underline{U}_{N3} &= \frac{(\underline{Y}_{A3} + \underline{Y}_{B3} + \underline{Y}_{C3})\underline{E}_3}{\underline{Y}_{A3} + \underline{Y}_{B3} + \underline{Y}_{C3} + \underline{Y}_{N3}} = \frac{\left(\frac{1}{30}e^{-j90^\circ} + \frac{3}{10}e^{j90^\circ} + \frac{1}{10}\right)40e^{j90^\circ}}{\frac{1}{30}e^{-j90^\circ} + \frac{3}{10}e^{j90^\circ} + \frac{1}{10} + 0,3} = \\ &= (-13,8 + j19,2) = 23,6e^{j126^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

Napięcia fazowe odbiornika

$$\begin{aligned} \underline{U}_3 &= \underline{U}_{A3} = \underline{U}_{B3} = \underline{U}_{C3} = \underline{E}_3 - \underline{U}_{N3} = (j40 + 13,8 - j19,2) = \\ &= (13,8 + j20,8) \text{ V} \end{aligned}$$

Prądy fazowe

$$\underline{I}_{A3} = \underline{Y}_{A3} \underline{U}_{A3} = \left(-j\frac{1}{30}\right)(13,8 + j20,8) = (0,69 - j0,46) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{B3} = \underline{Y}_{B3} \underline{U}_{B3} = (j0,3)(13,8 + j20,8) = (-6,24 + j4,14) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{C3} = \underline{Y}_{C3} \underline{U}_{C3} = 0,1(13,8 + j20,8) = (1,38 + j2,08) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{N3} = \underline{Y}_{N3} \underline{U}_{N3} = \underline{I}_{A3} + \underline{I}_{B3} + \underline{I}_{C3} = (-4,17 + j5,76) = 7,1e^{j126^\circ} \text{ A}$$

Obliczamy wskazania przyrządów.

Woltomierz V_1 mierzy wartość skuteczną napięcia fazowego źródła

$$U_{V1} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{200^2 + 40^2} = 204 \text{ V}$$

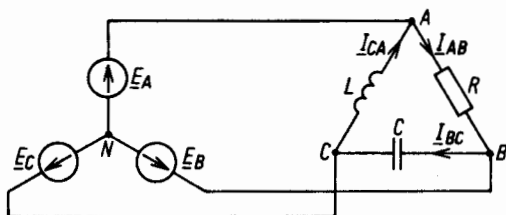
Woltomierz V_2 mierzy wartość skuteczną napięcia odbiornika w fazie A

$$U_{V2} = \sqrt{U_{A1}^2 + U_{A3}^2} = \sqrt{184,4^2 + 24,96^2} = 186 \text{ V}$$

Woltomierz V_3 mierzy spadek napięcia na impedancji $\underline{Z}_N$ od pierwszej i trzeciej harmonicznej

$$U_{V3} = \sqrt{U_{N1}^2 + U_{N3}^2} = \sqrt{36,6^2 + 23,6^2} = 43,5 \text{ V}$$

4.37. Odbiornik trójfazowy połączony w trójkąt (rys. 4.37) jest zasilany ze źródła symetrycznego, połączonych w gwiazdę, o napięciu niesinusoidalnym. Parametry odbiornika dla pierwszej harmonicznej wynoszą: $R = 5 \Omega$, $\omega_1 L = 5 \Omega$, $1/(\omega_1 C) = 5 \Omega$. Wartość chwilowa napięcia fazy A jest równa: $e_A = [310 \sin \omega_1 t + 100 \sin(3\omega_1 t + 45^\circ) + 36 \sin 5\omega_1 t + 25 \sin(9\omega_1 t + 90^\circ)] \text{ V}$. Obliczyć wartość skuteczną napięcia fazowego i napięcia międzyfazowego źródła, napięcia fazowego odbiornika oraz wartości skuteczne prądów fazowych odbiornika.



Rys. 4.37

ROZWIĄZANIE. Wartość skuteczną napięcia fazowego źródła

$$E_f = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_9^2} = \sqrt{\frac{310^2 + 100^2 + 36^2 + 25^2}{2}} = 232,4 \text{ V}$$

a wartość skuteczną napięcia międzyfazowego źródła

$$U_p = \sqrt{3} \cdot \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{310^2 + 36^2}{2}} = 382,2 \text{ V}$$

Napięcie międzyfazowe źródła jest równe napięciu międzyfazowemu na zaciskach odbiornika

$$U_p = \sqrt{U_{p1}^2 + U_{p3}^2} = 382,2 \text{ V}$$

gdzie: U_{p1} i U_{p5} — napięcia odpowiednio od pierwszej i od piątej harmonicznej

$$U_{p1} = \sqrt{3} E_1 = \frac{310}{\sqrt{2}} \sqrt{3} = 380 \text{ V}$$

$$U_{p5} = \sqrt{3} E_5 = \frac{36}{\sqrt{2}} \sqrt{3} = 44 \text{ V}$$

Wartości skuteczne prądów w poszczególnych fazach odbiornika od pierwszej harmonicznej napięcia wynoszą

$$I_{AB1} = \frac{U_{p1}}{R} = \frac{380}{5} = 76 \text{ A}$$

$$I_{BC1} = \frac{U_{p1}}{\frac{1}{\omega_1 C}} = \frac{380}{5} = 76 \text{ A}$$

$$I_{CA1} = \frac{U_{p1}}{\omega_1 L} = \frac{380}{5} = 76 \text{ A}$$

natomiast wartości skuteczne prądów w poszczególnych fazach odbiornika od piątej harmonicznej napięcia są równe

$$I_{AB5} = \frac{U_{p5}}{R} = \frac{44}{5} = 8,8 \text{ A}$$

$$I_{BC5} = \frac{U_{p5}}{\frac{1}{5\omega_1 C}} = \frac{44}{1} = 44 \text{ A}$$

$$I_{CA5} = \frac{U_{p5}}{5\omega_1 L} = \frac{44}{25} = 1,76 \text{ A}$$

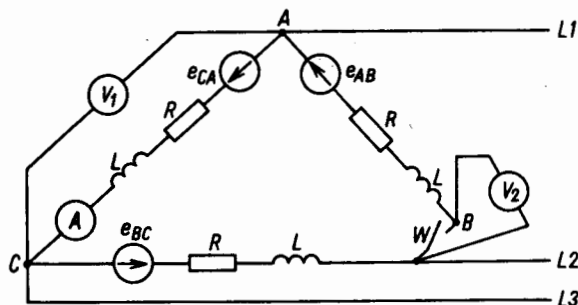
Wartości skuteczne prądów odkształconych wynoszą

$$I_{AB} = \sqrt{I_{AB1}^2 + I_{AB5}^2} = \sqrt{76^2 + 8,8^2} = 76,5 \text{ A}$$

$$I_{BC} = \sqrt{I_{BC1}^2 + I_{BC5}^2} = \sqrt{76^2 + 44^2} = 87,8 \text{ A}$$

$$I_{CA} = \sqrt{I_{CA1}^2 + I_{CA5}^2} = \sqrt{76^2 + 1,76^2} = 76,1 \text{ A}$$

4.38. Napięcie fazowe źródła symetrycznego połączonego w trójkąt ma wartość chwilową: $e_{AB} = [200\sqrt{2} \sin(\omega_1 t + 90^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 90^\circ) + 40\sqrt{2} \sin 5\omega_1 t + 20\sqrt{2} \sin 9\omega_1 t] \text{ V}$. Obliczyć wskazania woltomierzy i amperomierza włączonych jak na rys. 4.38 dla dwóch wariantów: a) wyłącznik W otwarty, b) wyłącznik W zamknięty. Wartości parametrów źródła dla pierwszej harmonicznej wynoszą: $R = 6 \Omega$, $\omega_1 L = 2 \Omega$.



Rys. 4.38

ROZWIĄZANIE

a) Wyłącznik W otwarty

Wskazanie amperomierza jest równe zero.

Wskazanie woltomierza V_1 wynosi

$$U_{V1} = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_9^2} = \sqrt{200^2 + 60^2 + 40^2 + 20^2} = 213,5 \text{ V}$$

a woltomierza V_2

$$U_{V2} = 3\sqrt{U_3^2 + U_9^2} = 3\sqrt{60^2 + 20^2} = 189,7 \text{ V}$$

b) Wyłącznik W zamknięty

Wskazanie woltomierza V_2 jest równe zero, a wskazanie woltomierza V_1 wynosi

$$U_{V1} = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} = \sqrt{200^2 + 40^2} = 204 \text{ V}$$

W obwodzie zamkniętego trójkąta pojawiają się prądy od trzeciej i dziewiątej harmonicznej (prądy te nie występują w przewodach łączących źródło z odbiornikiem)

$$\underline{I}_3 = \frac{3 \underline{E}_3}{3(R + j3\omega_1 L)} = \frac{\underline{E}_3}{R + j3\omega_1 L} = \frac{j60}{6 + j6} = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ A}$$

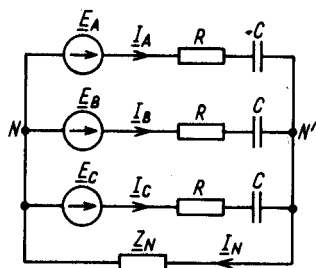
$$\underline{I}_9 = \frac{3 \underline{E}_9}{3(R + j9\omega_1 L)} = \frac{\underline{E}_9}{R + j9\omega_1 L} = \frac{20}{6 + j18} = 1,05e^{-j71^\circ} \text{ A}$$

Wskazanie amperomierza wynosi

$$I_{\text{amp}} = \sqrt{I_3^2 + I_9^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 1,05^2} = 7,15 \text{ A}$$

4.7. Zadania do samodzielnego rozwiązania

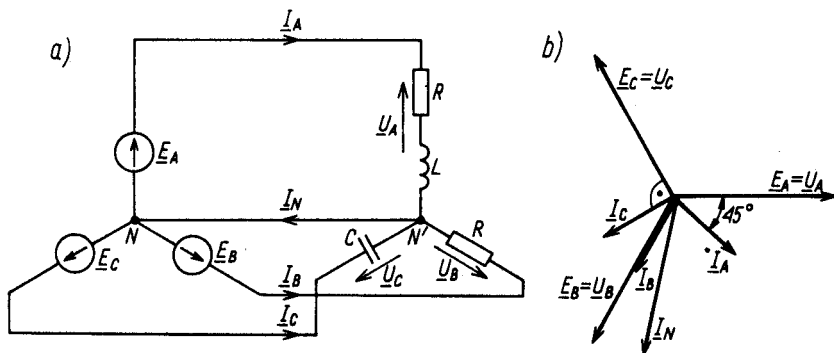
4.39. Symetryczne źródło o napięciu fazy A , $\underline{E}_A = 220 \text{ V}$ zasila w układzie czteroprzewodowym odbiornik połączony w gwiazdę o impedancji każdej z faz $\underline{Z} = (40 - j30) \Omega$ oraz impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = (1 + j1) \Omega$ (rys. 4.39). Obliczyć rozpyły prądów oraz moc czynną i bierną odbiornika.



Rys. 4.39

Odpowiedź. $\underline{I}_A = 4,4e^{j37^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_B = 4,4e^{-j83^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_C = 4,4e^{j157^\circ} \text{ A}$,
 $\underline{I}_N = 0$, $P = 2323 \text{ W}$, $Q = -1742 \text{ var}$.

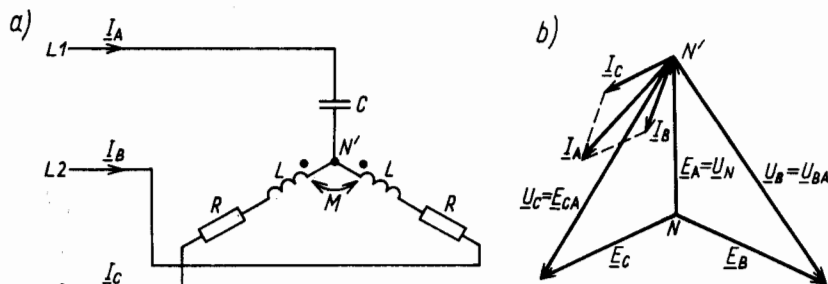
4.40. Symetryczny generator o napięciu międzyfazowym $U_p = 380 \text{ V}$ zasila odbiornik połączony w gwiazdę o parametrach: $R = X_L = X_C = 100 \Omega$ w układzie czteroprzewodowym $\underline{Z}_N = 0$ (rys. 4.40a). Obliczyć wartości prądów w postaci chwilowej, moc czynną i bierną odbiornika, narysować wykres wektorowy prądów i napięć.



Rys. 4.40

Odpowiedź. Przyjmując argument napięcia fazy A źródła równy zero, otrzymujemy: $i_A = 2,2 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ A}$; $i_B = 2,2\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ A}$; $i_C = 2,2\sqrt{2} \sin(\omega t + 210^\circ) \text{ A}$; $i_N = 5,25\sqrt{2} \sin(\omega t - 111^\circ) \text{ A}$; $P = 726 \text{ W}$; $Q = -242 \text{ var}$. Wykres wektorowy jest przedstawiony na rys. 4.40b.

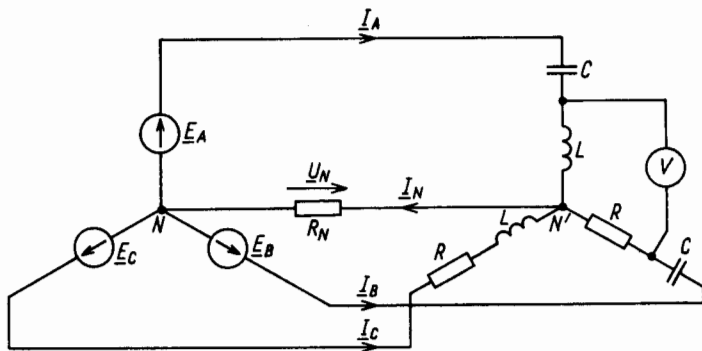
4.41. Symetryczne trójfazowe źródło o napięciu fazy A , $\underline{E}_A = 200e^{j90^\circ} \text{ V}$ zasila odbiornik połączony w gwiazdę w układzie trójprzewodowym przedstawionym na rys. 4.41a. Obliczyć wartości skuteczne prądów oraz wykonać wykres wektorowy. Dane odbiornika: $R = 80 \Omega$, $X_L = 100 \Omega$, $X_C = 20 \Omega$, $X_M = 20 \Omega$.



Rys. 4.41

Odpowiedź. Po eliminacji sprzężeń otrzymujemy układ ze zwartą fazą A, w którym $\underline{Z}_A = 0$, $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = (80 + j80) \Omega$. Wartości skuteczne prądów: $I_A = 5,3 \text{ A}$; $I_B = I_C = 3,06 \text{ A}$. Wykres wektorowy jest przedstawiony na rys. 4.41b.

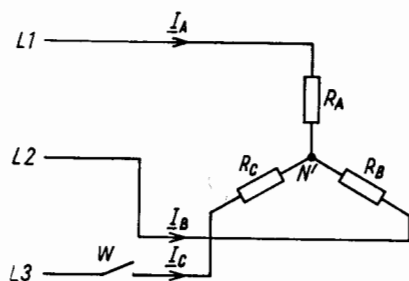
4.42. Symetryczne trójfazowe źródło zasilania o napięciu fazy A, $e_A = 100\sqrt{2} \sin 100t \text{ V}$ zasila odbiornik niesymetryczny połączony w gwiazdę o parametrach: $R = 20 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 500 \mu\text{F}$ w układzie czteroprzewodowym (rys. 4.42) o impedancji przewodu neutralnego $\underline{Z}_N = 10 \Omega$. Obliczyć rozpył prądów oraz wskazanie woltomierza.



Rys. 4.42

Odpowiedź. $\underline{I}_B = (-1,58 - j5,91) \text{ A}$; $\underline{I}_C = (-1,58 + j5,91) \text{ A}$; $\underline{I}_N = 10 \text{ A}$; $\underline{I}_A = \underline{I}_B + \underline{I}_C - \underline{I}_N = -13,16 \text{ A}$; $U_V = 148,4 \text{ V}$.

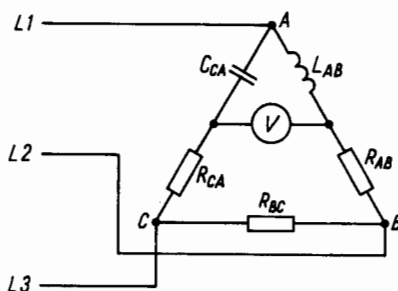
4.43. W układzie przedstawionym na rys. 4.43 wystąpiła przerwa w fazie C. Obliczyć wartości skuteczne prądów oraz napięcia fazowe, jeżeli $R_A = 30 \Omega$, $R_B = 90 \Omega$, a napięcie fazowe trójfazowego źródła symetrycznego $E = 220 \text{ V}$.



Rys. 4.43

Odpowiedź. $I_A = I_B = 3,16 \text{ A}$; $I_C = 0$; $U_A = 95 \text{ V}$; $U_B = 285 \text{ V}$.

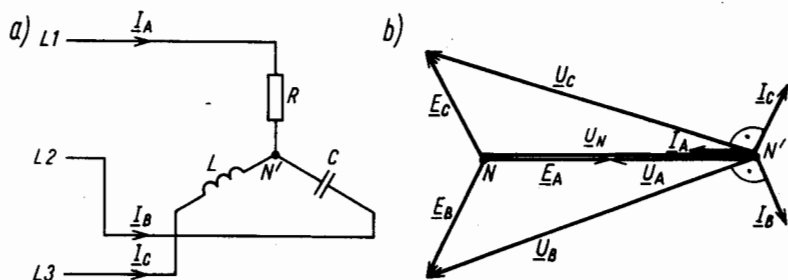
4.44. Obliczyć wskazanie woltomierza w obwodzie przedstawionym na rys. 4.44. Napięcie międzyfazowe symetrycznego źródła $U_p = 220 \text{ V}$. Dane elementów odbiornika: $R = X_L = X_C = 10 \Omega$.



Rys. 4.44

Odpowiedź. Wskazanie woltomierza $U_V = 300 \text{ V}$.

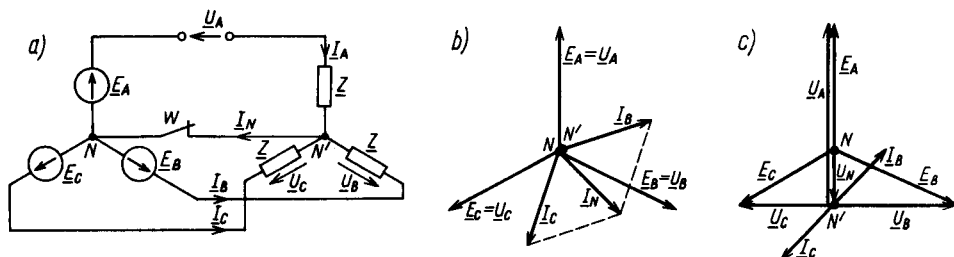
4.45. Symetryczne trójfazowe źródło o napięciu fazy A , $E_A = 10 \text{ V}$ zasila odbiornik połączony w gwiazdę o parametrach: $R = X_L = X_C = 1 \Omega$ (rys. 4.45a). Obliczyć prądy fazowe oraz wykonać wykres wektorowy.



Rys. 4.45

Odpowiedź. $\underline{I}_A = 17,3e^{j180^\circ} \text{ A}$; $\underline{I}_B = 33,4e^{-j75^\circ} \text{ A}$; $\underline{I}_C = 33,4e^{j75^\circ} \text{ A}$.
Wykres wektorowy jest przedstawiony na rys. 4.45b.

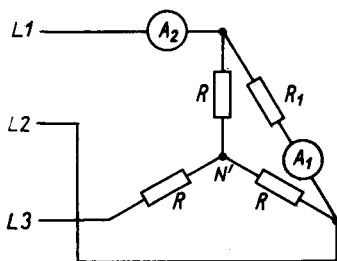
4.46. Odbiornik połączony w gwiazdę o impedancji każdej z faz $\underline{Z} = (50 - j50) \Omega$ jest zasilany z symetrycznego źródła o napięciu fazy A , $\underline{E}_A = j200 \text{ V}$ (rys. 4.46a). Obliczyć rozptył prądów, jeżeli w fazie A wystąpiła przerwa, dla dwóch wariantów: a) w układzie czteroprzewodowym, przyjmując $\underline{Z}_N = 0$, b) w układzie trójprzewodowym.



Rys. 4.46

Odpowiedź. a) $I_A = 0$; $i_B = 4 \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ A}$; $i_C = 4 \sin(\omega t - 105^\circ) \text{ A}$; $i_N = 4 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ A}$; b) $I_A = 0$; $I_N = 0$; $i_B = 2\sqrt{3} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$; $i_C = 2\sqrt{3} \sin(\omega t - 135^\circ) \text{ A}$. Wykresy wektorowe są przedstawione odpowiednio na rys. 4.46b i 4.46c.

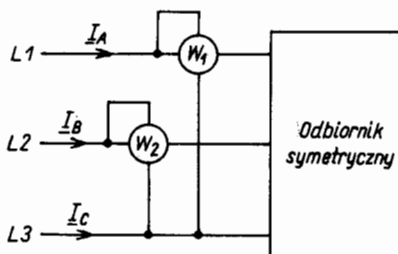
4.47. W odbiorniku trójfazowym symetrycznym przedstawionym na rys. 4.47 wartości skuteczne prądów płynących przez rezystory R wynoszą 10 A . Obliczyć wskazanie amperomierza A_2 , jeżeli amperomierz A_1 wskazuje 12 A oraz wiadomo, że generator jest symetryczny, a $R_1 \neq R$.



Rys. 4.47

Odpowiedź. Amperomierz wskazuje prąd $I_{A2} = 21,25 \text{ A}$.

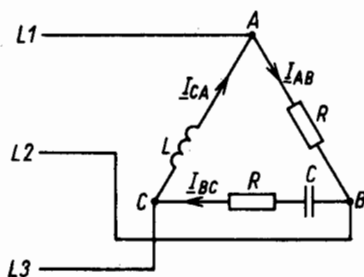
4.48. Obliczyć wskazania watomierzy włączonych do symetrycznego układu (rys. 4.48). Napięcie międzyfazowe symetrycznego źródła $U_p = 380 \text{ V}$; wartości skuteczne prądów fazowych wynoszą 10 A . Odbiornik ma charakter indukcyjny, a jego $\cos \varphi = 0,866$. Ile wynosi moc czynna i bierna tego odbiornika?



Rys. 4.48

Odpowiedź. $P_1 = 3800 \text{ W}$; $P_2 = 1900 \text{ W}$; $Q = 3290 \text{ var}$; $P = P_1 + P_2 = 5700 \text{ W}$.

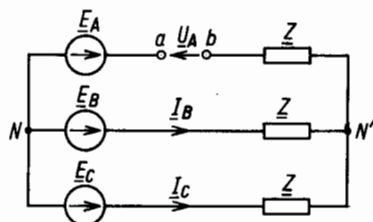
4.49. Odbiornik trójfazowy niesymetryczny, połączony w trójkąt, jest zasilany z symetrycznego źródła (rys. 4.49). Napięcie międzyfazowe $U_p = 380 \text{ V}$. Impedancje faz odbiornika wynoszą: $Z_{AB} = 100 \Omega$, $Z_{BC} = (100 - j100) \Omega$, $Z_{CA} = j100 \Omega$. Obliczyć moc czynną i bierną pobieraną przez odbiornik.



Rys. 4.49

Odpowiedź. $P = 2166 \text{ W}$; $Q = 722 \text{ var}$.

4.50. Symetryczne źródło o napięciu fazy A , $e_A = 220\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$ zasila odbiornik symetryczny o impedancji każdej z faz $Z = (100 + j100) \Omega$. Obliczyć składową zerową napięć fazowych po wystąpieniu przerwy w fazie A (rys. 4.50).



Rys. 4.50

Odpowiedź. Składowa zerowa napięć fazowych $\underline{U}_{0f} = 110 \text{ V}$.

4.51. Obliczyć składowe zerowe, zgodne i przeciwne:

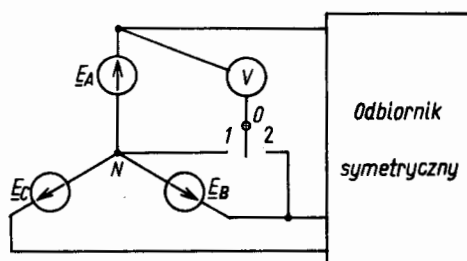
- a) prądów fazowych: $\underline{I}_A = 30e^{j90^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_B = 30e^{j0^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_C = 30e^{-j150^\circ} \text{ A}$;
 b) napięć międzyfazowych: $\underline{U}_{AB} = 200e^{j180^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_{BC} = 200e^{j0^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_{CA} = 0$.

Odpowiedź

a) $\underline{I}_{0f} = (1,33 - j5) \text{ A}$; $\underline{I}_{1f} = (-5 + j28,66) \text{ A}$; $\underline{I}_{2f} = (3,66 - j3,66) \text{ A}$;

b) $\underline{U}_{0p} = 0$; $\underline{U}_{1p} = (-100 + j57,73) \text{ V}$; $\underline{U}_{2p} = (-100 - j57,73) \text{ V}$.

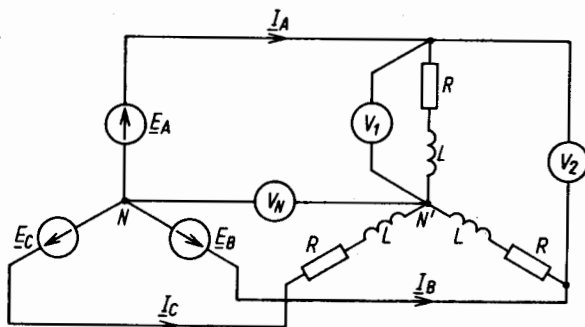
4.52. Odształcone napięcie fazowe generatora symetrycznego zawiera pierwszą i trzecią harmoniczną. Obliczyć wartości skuteczne tych harmonicznych, jeżeli woltomierz (rys. 4.51) w położeniu 1 wskazuje 170 V, a w położeniu 2 wskazuje 260 V.



Rys. 4.51

Odpowiedź. Wartości skuteczne pierwszej i trzeciej harmonicznej wynoszą odpowiednio: $U_1 = 150 \text{ V}$; $U_3 = 80 \text{ V}$.

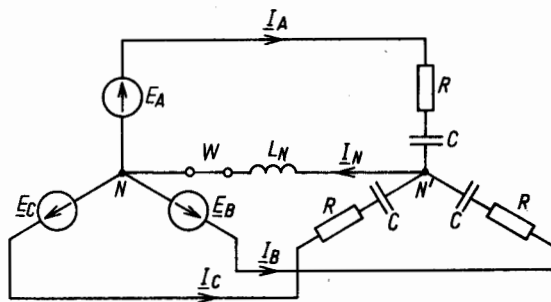
4.53. Symetryczne źródło zasilania o napięciu odształconym fazy A, $e_A = 100\sqrt{2}\sin\omega_1 t + 80\sqrt{2}\sin 3\omega_1 t + 60\sqrt{2}\sin(5\omega_1 t + 90^\circ) + 40\sqrt{2}\sin(9\omega_1 t + 45^\circ) \text{ V}$ zasila, połączony w gwiazdę, odbiornik o impedancji każdej z faz dla pierwszej harmonicznej $\underline{Z}_1 = (20 + j10) \Omega$ (rys. 4.52). Obliczyć wartości skuteczne prądów w obwodzie oraz wskazania woltomierzy.



Rys. 4.52

Odpowiedź. Wartości skuteczne prądów: $I_A = I_B = I_C = 4,6$ A; wskazania woltomierzy: $U_{V1} = 116,6$ V, $U_{V2} = 202$ V, $U_{VN} = 89,4$ V.

4.54. Symetryczny odbiornik połączony w gwiazdę, o charakterze pojemnościowym (rys. 4.53) o współczynniku mocy $\cos \varphi = 0,8$, jest połączony z symetrycznym źródłem zawierającym pierwszą harmoniczną napięcia $e_{A1} = 200\sqrt{2} \sin \omega_1 t$ V w układzie czteroprzewodowym. Odbiornik ten pobiera moc czynną $P_1 = 1920$ W. O ile zmieni się moc czynna i bierna tego odbiornika, jeżeli w napięciu źródłowym pojawi się dodatkowo trzecia harmoniczna $e_{A3} = 60\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 90^\circ)$ V, a impedancja przewodu neutralnego dla pierwszej harmonicznej $\underline{Z}_{N1} = j2 \Omega$? Jak zmieni się ta moc, jeżeli wyłącznik W znajdujący się w przewodzie neutralnym zostanie otwarty?



Rys. 4.53

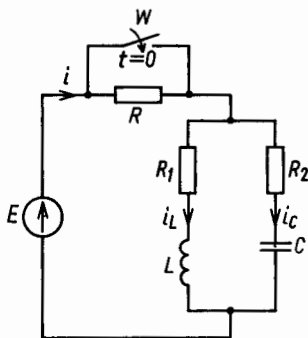
Odpowiedź. Dla pierwszej harmonicznej $P_1 = 1920$ W, $Q_1 = -1440$ var; dla trzeciej harmonicznej $P_3 = 223,6$ W, $Q_3 = 97$ var. Przy wystąpieniu w źródle pierwszej i trzeciej harmonicznej moc czynna odbiornika $P = P_1 + P_3 = 2143,6$ W oraz moc bierna $Q = Q_1 + Q_3 = -1343$ var. Jeżeli w przewodzie neutralnym wystąpi przerwa, to moc czynna i bierna odbiornika będą wywołane tylko pierwszą harmoniczną.

5

Obwody elektryczne w stanie nieustalonym

5.1. Ustalanie warunków początkowych

5.1. W obwodzie przedstawionym na rys. 5.1 zamknięto wyłącznik W w chwili $t = 0$. Określić warunki początkowe. Dane: $E = 30 \text{ V}$; $R = 20 \Omega$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 40 \Omega$; $L = 1 \text{ mH}$; $C = 1 \mu\text{F}$.



Rys. 5.1

ROZWIĄZANIE. Warunki początkowe wyznaczamy w chwili $t = 0^-$, tzn. w chwili tuż przed zamknięciem wyłącznika. Ponieważ źródło jest źródłem napięcia stałego, zatem prąd w gałęzi źródła jest równy prądowi w gałęzi R_1, L

$$i(0^-) = i_L(0^-) = \frac{E}{R + R_1} = \frac{30}{20 + 10} = 1 \text{ A}$$

$$i_C(0^-) = 0$$

Napięcia przed zamknięciem wyłącznika wynoszą

$$u_L(0^-) = 0$$

$$u_C(0^-) = R_1 i_L(0^-) = 10 \text{ V}$$

Warunki początkowe w chwili $t = 0^+$, tzn. w chwili tuż po zamknięciu wyłącznika, wyznaczmy korzystając z praw komutacji. Zatem

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1 \text{ A}$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10 \text{ V}$$

Pozostałe wielkości wyznaczamy z zależności

$$E = R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt}$$

$$E = R_2 i_C + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt$$

$$i = i_L + i_C$$

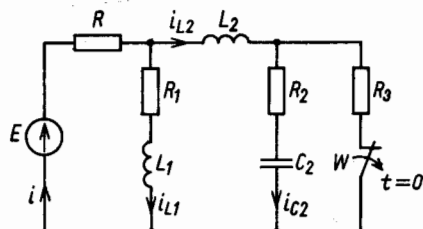
zatem

$$u_L(0^+) = L \frac{di_L}{dt} = E - R_1 i_L(0^+) = 30 - 10 = 20 \text{ V}$$

$$i_C(0^+) = \frac{E - u_C(0^+)}{R_2} = \frac{30 - 10}{40} = 0,5 \text{ A}$$

$$i(0^+) = i_L(0^+) + i_C(0^+) = 1 + 0,5 = 1,5 \text{ A}$$

5.2. W obwodzie przedstawionym na rys. 5.2 otwarto wyłącznik W w chwili $t = 0$. Określić warunki początkowe. Dane: $E = 220 \text{ V}$; $R = 20 \Omega$; $R_1 = 40 \Omega$; $R_2 = 100 \Omega$; $R_3 = 60 \Omega$; $L_1 = L_2 = 0,5 \text{ H}$; $C_2 = 100 \mu\text{F}$.



Rys. 5.2

ROZWIĄZANIE. Warunki początkowe wyznaczymy dla chwili $t = 0^-$. Przed otwarciem wyłącznika prąd w gałęzi źródła wynosi

$$i(0^-) = \frac{E}{R + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{220}{20 + \frac{40 \cdot 60}{100}} = 5 \text{ A}$$

w pozostałych gałęziach

$$i_{L1}(0^-) = \frac{E - Ri}{R_1} = \frac{220 - 20 \cdot 5}{40} = 3 \text{ A}$$

$$i_{L2}(0^-) = \frac{E - Ri}{R_3} = \frac{220 - 20 \cdot 5}{60} = 2 \text{ A}$$

Napięcie na kondensatorze

$$u_{C2}(0^-) = R_3 i_{L2}(0^-) = 60 \cdot 2 = 120 \text{ V}$$

Warunki początkowe w chwili $t = 0^+$, tzn. tuż po otwarciu wyłącznika, wyznaczymy korzystając z praw komutacji. Zatem

$$i_{L1}(0^+) = i_{L1}(0^-) = 3 \text{ A}$$

$$i_{L2}(0^+) = i_{L2}(0^-) = 2 \text{ A}$$

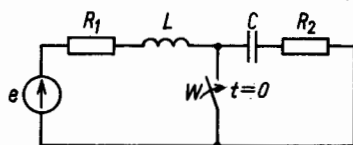
$$u_{C2}(0^+) = u_{C2}(0^-) = 120 \text{ V}$$

Napięcie na zaciskach wyłącznika tuż po jego otwarciu jest równe napięciu na gałęzi R_2 , C_2 , czyli

$$u_W(0^+) = u_{C2}(0^+) + R_2 i_{L2}(0^+) = 120 + 100 \cdot 2 = 320 \text{ V}$$

5.2. Metoda klasyczna

5.3. Stosując metodę klasyczną, obliczyć prąd w cewce o indukcyjności L i napięcie na kondensatorze o pojemności C w stanie nieustalonym, jaki powstanie w obwodzie z rys. 5.3 w wyniku zamknięcia wyłącznika W . Dane: $e = 10\sqrt{2} \sin(10t + 90^\circ) \text{ V}$; $L = 2 \text{ H}$; $C = 10 \text{ mF}$; $R_1 = R_2 = 5 \Omega$.



Rys. 5.3

ROZWIĄZANIE. Wyznamy warunki początkowe. Przed zamknięciem wyłącznika:

— impedancja zespolona

$$\underline{Z} = R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 10 + j\left(10 \cdot 2 - \frac{10^3}{10 \cdot 10}\right) = (10 + j10) \Omega$$

— wartość skuteczna zespolona napięcia źródła

$$\underline{E} = 10 e^{j90^\circ} \text{ V}$$

— wartość skuteczna zespolona prądu

$$\underline{I} = \underline{I}_L = \frac{10 e^{j90^\circ}}{10 + j10} = \frac{j10}{10 + j10} = 0,5 + j0,5 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \text{ A}$$

— wartość skuteczna zespolona napięcia na kondensatorze

$$\underline{U}_C = \left(-j \frac{1}{\omega C}\right) \underline{I} = -j10(0,5 + j0,5) = 5 - j5 = 5\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \text{ V}$$

— wartość chwilowa prądu

$$i_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sin(10t + 45^\circ) = \sin(10t + 45^\circ) \text{ A}$$

— wartość chwilowa napięcia na kondensatorze

$$u_C = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(10t - 45^\circ) = 10 \sin(10t - 45^\circ) \text{ V}$$

Stan początkowy obwodu (w chwili $t = 0$)

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ A}$$

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 10 \sin(-45^\circ) = -\frac{10 \cdot \sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \text{ V}$$

Po zamknięciu wyłącznika W powstają dwa obwody: obwód szeregowy R_1, L zasilany ze źródła napięcia sinusoidalnie zmiennego oraz obwód szeregowy R_2, C znajdujący się w stanie zwarcia. W obu obwodach warunki początkowe są niezerowe.

Rozwiązujemy obwód szeregowy R_1, L

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} = e$$

Składową przejściową prądu i_{Lp} obliczamy z równania jednorodnego

$$R_1 i_{Lp} + L \frac{di_{Lp}}{dt} = 0, \quad \text{stad} \quad i_{Lp} = K e^{-\frac{R_1}{L} t} = K e^{-2,5t}$$

Składową ustaloną prądu wyznaczamy z zależności

$$i_{Lu} = \frac{10\sqrt{2}}{Z_1} \sin(10t + 90^\circ - \varphi_1) = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5^2 + 20^2}} \sin(10t + 90^\circ - 76^\circ) = \\ = 0,686 \sin(10t + 14^\circ) \text{ A}$$

Składowa ustalona w chwili $t = 0$

$$i_{Lu}(0^-) = i_{Lu}(0^+) = 0,686 \sin 14^\circ = 0,166 \text{ A}$$

Prąd w gałęzi R_1, L jest równy sumie składowej ustalonej i składowej przejściowej:

— w dowolnej chwili $t > 0$

$$i_L = i_{Lu} + i_{Lp}$$

— w chwili $t = 0^+$

$$i_L(0^+) = i_{Lu}(0^+) + i_{Lp}(0^+)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,166 + K, \quad \text{stąd} \quad K = 0,54$$

Ostatecznie

$$i_L = (0,686 \sin(10t + 14^\circ) + 0,54 e^{-2,5t}) \text{ A}$$

Rozwiązujemy obwód szeregowy R_2, C

$$u_C + R_2 C \frac{du_C}{dt} = 0$$

Wobec braku źródła zewnętrznego, składowa ustalona prądu kondensatora jest równa zeru. Stan nieustalony określa składowa przejściowa $u_{Cp} = u_C$.
Zatem

$$u_C = K_1 e^{-\frac{1}{R_2 C} t} = K_1 e^{-20t}$$

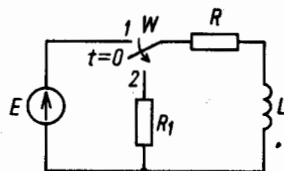
w chwili $t = 0$

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = -5\sqrt{2} = K_1$$

Ostatecznie

$$u_C = -5\sqrt{2} e^{-20t} \text{ V}$$

5.4. W obwodzie jak na rys. 5.4 w chwili $t = 0$ łącznik W przełączono z pozycji 1 w pozycję 2. Obliczyć największą wartość, jaką może osiągnąć napięcie u_L na cewce. Dane: $R = 4 \Omega$; $R_1 = 6 \Omega$; $L = 5 \text{ H}$; $E = 100 \text{ V}$.



Rys. 5.4

ROZWIĄZANIE. Stan początkowy obwodu jest niezerowy. W chwili $t = 0^-$ przy położeniu łącznika W w pozycji 1 prąd w obwodzie wynosi

$$i = \frac{E}{R} = \frac{100}{4} = 25 \text{ A}$$

Po przełączeniu łącznika w pozycję 2 powstaje stan nieustalony

$$(R_1 + R)i + L \frac{di}{dt} = 0$$

stąd

$$i = K e^{-\frac{R+R_1}{L}t}$$

Składowa ustalona prądu jest równa zeru. W chwili $t = 0$

$$i(0^-) = i(0^+) = 25 = K$$

$$i = 25 e^{-\frac{R+R_1}{L}t} \text{ A}$$

Napięcie na cewce

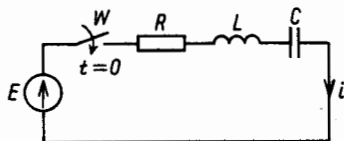
$$u_L = L \frac{di}{dt} = -L \frac{R+R_1}{L} 25 e^{-2t} = -250 e^{-2t} \text{ V}$$

Największa wartość napięcia wystąpi w chwili $t = 0$. Wówczas wartość bezwzględna napięcia wynosi

$$|u_{L \max}| = 250 \text{ V}$$

Stąd wniosek, że napięcie na cewce w chwili $t = 0$ jest 2,5 raza większe od napięcia źródła.

5.5. Do dwójnika szeregowego RLC (rys. 5.5) w chwili $t = 0$ przyłożono napięcie stałe E . Obliczyć prąd i w stanie nieustalonym. Dane: $E = 80 \text{ V}$; $C = 0,5 \text{ F}$; pierwiastki równania charakterystycznego $s_1 = -6 + j8$, $s_2 = -6 - j8$. Warunki początkowe zerowe.



Rys. 5.5

ROZWIĄZANIE. Pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone, sprzężone, zatem stan nieustalony ma charakter oscylacyjny. Równanie prądu ma postać

$$i = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

a pierwiastki równania charakterystycznego

$$s_{1,2} = -\alpha \mp j\omega, \quad \text{zatem} \quad \alpha = 6; \omega = 8$$

Ze wzoru

$$\alpha^2 + \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

obliczamy indukcyjność

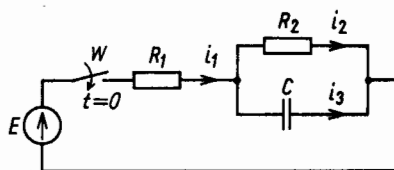
$$L = \frac{1}{(\alpha^2 + \omega^2)C} = \frac{1}{(6^2 + 8^2)0,5} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ H}$$

Prąd

$$i = \frac{80}{8 \cdot 0,02} e^{-6t} \sin 8t = 500 e^{-6t} \sin 8t \text{ A}$$

5.3. Metoda operatorowa

5.6. W obwodzie przedstawionym na rys. 5.6 w chwili $t = 0$ zamknięto łącznik W . Wyznaczyć prądy i_1 , i_2 , i_3 w stanie nieustalonym. Stan początkowy obwodu zerowy. Zadanie rozwiązać metodą operatorową.



Rys. 5.6

ROZWIĄZANIE. Ponieważ stan początkowy obwodu jest zerowy, tzn. $u_C(0^-) = 0$, można więc skorzystać z prawa Ohma dla transformat

$$I_1(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}$$

Impedancja operatorowa obwodu

$$Z(s) = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_1 R_2 C s + R_1 + R_2}{R_2 C s + 1}$$

Zatem

$$I_1(s) = \frac{E(R_2 C s + 1)}{s(R_1 R_2 C s + R_1 + R_2)} = \frac{L(s)}{s M(s)}$$

W celu wyznaczenia $i_1(t)$ zastosujemy następujący wzór Heaviside'a (postać 2.):

$$i_1(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \frac{L(s_1)}{s_1 M'(s_1)} e^{s_1 t}, \quad \text{gdzie} \quad s_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$

zatem

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E}{R_1 + R_2} \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{gdzie} \quad \tau = -\frac{1}{s_1}$$

Transformata prądu $I_2(s)$

$$I_2(s) = \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} \frac{I_1(s)}{R_2} = \frac{E}{s(R_1 R_2 C s + R_1 + R_2)}$$

Na podstawie wzoru Heaviside'a

$$i_2(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{E}{R_1 + R_2} e^{s_1 t} = \frac{E}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

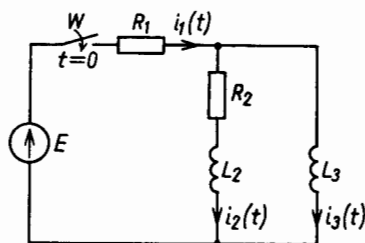
$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

5.7. Do obwodu jak na rys. 5.7 przyłożono napięcie stałe E . Obliczyć prąd $i_1(t)$ w stanie nieustalonym. Warunki początkowe są zerowe. Dane: $E = 15 \text{ V}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $L_2 = 1 \text{ H}$; $L_3 = 0,5 \text{ H}$.

ROZWIĄZANIE. Korzystamy z prawa Ohma dla transformat przy warunkach początkowych zerowych

$$Z(s) = R_1 + \frac{s L_3 (R_2 + s L_2)}{R_2 + s (L_2 + L_3)} = \frac{s^2 + 5s + 4}{3s + 4}$$

$$I_1(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{15(3s + 4)}{s(s^2 + 5s + 4)} = \frac{L(s)}{s M(s)}$$



Rys. 5.7

Obliczamy pierwiastki równania

$$s^2 + 5s + 4 = 0, \quad \text{stad} \quad s_1 = -4; \quad s_2 = -1$$

$$L(s) = 60 + 45s \quad L(s_1) = -120; \quad L(s_2) = 15$$

$$M(s) = s^2 + 5s + 4 \quad M'(s_1) = -3; \quad M'(s_2) = 3$$

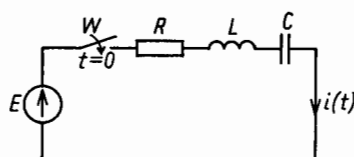
$$L(0) = 60; \quad M(0) = 4$$

Korzystamy ze wzoru Heaviside'a

$$i_1(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \frac{L(s_1)}{s_1 M'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{L(s_2)}{s_2 M'(s_2)} e^{s_2 t}$$

$$i_1(t) = (15 - 10e^{-4t} - 5e^{-t}) \text{ A}; \quad i_1(0^+) = 0$$

5.8. Do dwójnika szeregowego *RLC* (rys. 5.8) przyłożono napięcie stałe *E*. Obliczyć prąd i napięcie na rezystorze, napięcie na kondensatorze oraz napięcie na cewce w stanie nieustalonym. Dane: $E = 200 \text{ V}$; $R = 1 \text{ k}\Omega$; $L = 1 \text{ H}$; $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$; $u_C(0^-) = 0$; $i(0^-) = 0$.



Rys. 5.8

ROZWIĄZANIE. Korzystamy z prawa Ohma dla transformat przy warunkach początkowych zerowych

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{E}{s \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right)} = \frac{E}{L \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{200}{s^2 + 1000s + 10^5}$$

Obliczamy pierwiastki równania

$$s^2 + 1000s + 10^5 = 0$$

stąd

$$s_1 = -112,5; \quad s_2 = -887,5$$

Korzystamy ze wzoru Heaviside'a

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{L(s_k)}{N'(s_k)} e^{s_k t}$$

$$N'(s) = (s - s_2) + (s - s_1)$$

$$N'(s_1) = s_1 - s_2 = 775$$

$$N'(s_2) = s_2 - s_1 = -775$$

zatem

$$i(t) = (0,26 e^{-112,5t} - 0,26 e^{-887,5t}) \text{ A}$$

Napięcie na rezystorze

$$u_R(t) = R i(t) = (260 e^{-112,5t} - 260 e^{-887,5t}) \text{ V}$$

Napięcie na cewce obliczamy z zależności

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = (229 e^{-887,5t} - 29 e^{-112,5t}) \text{ V}$$

Napięcie na kondensatorze w postaci operatorowej

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_C(0^+)}{s}$$

Ponieważ $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$, zatem

$$U_C(s) = \frac{200}{(s + 112,5)(s + 887,5)} \frac{10^5}{s} = \frac{2 \cdot 10^7}{s(s + 112,5)(s + 887,5)}$$

Ze względu na to, że jeden pierwiastek jest zerowy, korzystamy z drugiej postaci wzoru Heaviside'a

$$u_C(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}$$

Zatem

$$u_C(t) = (200 + 29 e^{-887,5t} - 229 e^{-112,5t}) \text{ V}$$

Sprawdzamy warunek początkowy dla $t = 0$

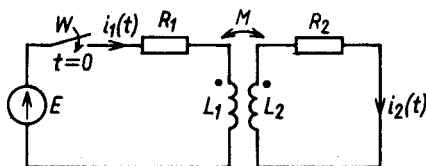
$$u_C(0^+) = 200 + 29 - 229 = 0 \text{ V}$$

$$u_L(0^+) = 229 - 29 = 200 \text{ V}$$

$$u_R(0^+) = 260 - 260 = 0 \text{ V}$$

W chwili $t = 0^+$, tuż po komutacji, powstaje napięcie na cewce równe 200 V i równoważy napięcie przyłożone $E = 200$ V.

5.9. Do obwodu jak na rys. 5.9 (transformator powietrzny) przyłożono w chwili $t = 0$ napięcie E . Obliczyć prądy $i_1(t)$ oraz $i_2(t)$ w stanie nieustalonym. Warunki początkowe zerowe. Dane: $E = 10$ V; $R_1 = R_2 = 1$ Ω ; $L_1 = 2$ H; $L_2 = 3$ H; $M = 1$ H.



Rys. 5.9

ROZWIĄZANIE. Układamy równania dla oczek zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$E = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Stosujemy przekształcenie Laplace'a

$$\frac{E}{s} = R_1 I_1(s) + s L_1 I_1(s) - L_1 i_1(0^+) - s M I_2(s) + M i_2(0^+)$$

$$0 = R_2 I_2(s) + s L_2 I_2(s) - L_2 i_2(0^+) - s M I_1(s) + M i_1(0^+)$$

Zgodnie z założeniem $i_1(0^-) = 0$; $i_2(0^-) = 0$, zatem $i_1(0^+) = 0$; $i_2(0^+) = 0$, wobec tego

$$\frac{10}{s} = (1 + 2s) I_1(s) - s I_2(s)$$

$$0 = (1 + 3s) I_1(s) - s I_2(s)$$

stąd

$$I_1(s) = \frac{6s + 2}{s(s^2 + s + 0,2)}$$

$$s^2 + s + 0,2 = 0, \quad \text{stąd} \quad s_1 = -0,72, \quad s_2 = -0,28$$

$$I_1(s) = \frac{6s + 2}{s(s + 0,72)(s + 0,28)}$$

Przebieg czasowy obliczamy albo metodą residuów, albo korzystając ze wzoru Heaviside'a; wyznaczamy prąd w obwodzie pierwotnym transformatora

$$i_1(t) = (10 - 7,25 e^{-0,72t} - 2,67 e^{-0,28t}) \text{ A}$$

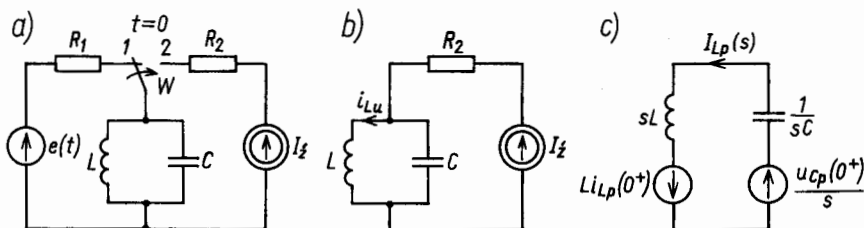
Prąd w obwodzie wtórnym transformatora

$$I_2(s) = \frac{s}{1 + 3s} I_1(s) = \frac{2}{s^2 + s + 0,2} = \frac{2}{(s + 0,72)(s + 0,28)}$$

stąd

$$i_2(t) = (4,5 e^{-0,28t} - 4,5 e^{-0,72t}) \text{ A}$$

5.10. W obwodzie jak na rys. 5.10a w chwili $t = 0$ łącznik przełączono z pozycji 1 w pozycję 2. Obliczyć prąd w cewce oraz napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym. Zastosować metodę operatorową. Dane: $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 5 \Omega$; $L = 2 \text{ H}$; $C = 0,5 \text{ F}$, $I_z = 2 \text{ A}$ — źródło prądu stałego; $e(t) = 10 \sin(t + 45^\circ) \text{ V}$.



Rys. 5.10

ROZWIĄZANIE. Obliczamy prąd w cewce i_L oraz napięcie na kondensatorze w chwili $t = 0$ — ustalamy stan zerowy. W położeniu 1 łącznika mamy obwód prądu sinusoidalnie zmiennego, przy czym $\omega = 1 \text{ rad/s}$ (z założenia); wówczas $\omega L = 2 = 1/\omega C$, a w obwodzie występuje rezonans prądów, $I_L = I_C$. Napięcie źródła (występujące na gałęzi LC) w postaci zespolonej

$$\underline{E} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = (5 + j5) \text{ V}$$

Prądy w cewce i kondensatorze wyrażamy następująco:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{E}}{j\omega L} = \frac{5 + j5}{j2} = (2,5 - j2,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_L = (-2,5 + j2,5) \text{ A}$$

Prąd w cewce:

— wartość chwilowa

$$i_L(t) = 5 \sin(t - 45^\circ) \text{ A}$$

— wartość w chwili $t = 0^-$

$$i_L(0^-) = 5 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2,5\sqrt{2} \text{ A} = i_L(0^+)$$

Napięcie na kondensatorze:

$$\underline{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}_C = -j2(-2,5 + j2,5) = (5 + j5) \text{ V}$$

— wartość chwilowa

$$u_C(t) = 10 \sin(t + 45^\circ) \text{ V}$$

— wartość w chwili $t = 0^-$

$$u_C(0^-) = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ V} = u_C(0^+)$$

Składową ustaloną prądu w cewce i składową ustaloną napięcia na kondensatorze obliczamy dla obwodu na rys. 5.10b

$$i_{Lu} = I_z = 2 \text{ A}$$

$$u_{Cu} = 0$$

Składowe przejściowe tych wielkości obliczamy dla obwodu na rys. 5.10c

$$\left(sL + \frac{1}{sC} \right) I_{Lp}(s) - Li_{Lp}(0^+) - \frac{u_{Cp}(0^+)}{s} = 0$$

przy czym

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^+) - i_{Lu}(0^+) = -2,5\sqrt{2} - 2 = -5,5 \text{ A}$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^+) - u_{Cu}(0^+) = 5\sqrt{2} = 7,1 \text{ V}$$

$$I_{Lp}(s) = \frac{Li_{Lp}(0^+) + \frac{u_{Cp}(0^+)}{s}}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{-5,5s + 3,6}{s^2 + 1}$$

Zatem mamy podwójny pierwiastek mianownika wynoszący $\pm j$.

Przedstawiamy funkcję operatorową prądu w postaci dwóch składowych

$$I_{Lp}(s) = -\frac{5,5s}{s^2 + 1} + \frac{3,6}{s^2 + 1}$$

Z tablic oryginałów i transformat

$$i_{Lp}(t) = (-5,5 \cos t + 3,6 \sin t) \text{ A}$$

Prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym

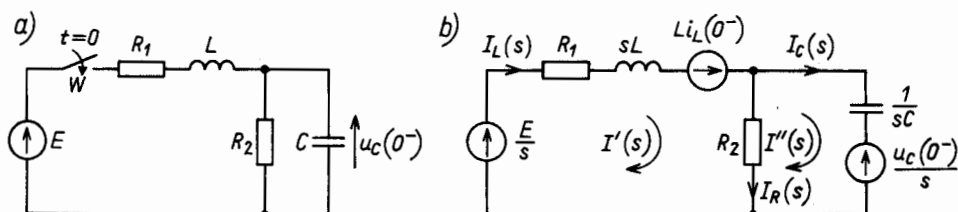
$$i_L(t) = i_{Lu} + i_{Lp}(t) = (2 - 5,5 \cos t + 3,6 \sin t) \text{ A}$$

Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym zawiera tylko składową przejściową

$$\begin{aligned}
 U_{Cp}(s) &= -\frac{1}{sC} I_{Lp}(s) + \frac{u_{Cp}(0^+)}{s} = -\frac{2}{s} \frac{-5,5s + 3,6}{s^2 + 1} + \frac{7,1}{s} = \\
 &= -\frac{7,2}{s(s^2 + 1)} + \frac{11}{(s^2 + 1)} + \frac{7,1}{s} \\
 u_{Cp}(t) &= (7,1 \cos t + 11 \sin t) \text{ V}
 \end{aligned}$$

Stan nieustalony występuje w obwodzie bezrezystancyjnym, a więc w układzie powstają drgania niegasnące.

5.11. W obwodzie przedstawionym na rys. 5.11a obliczyć prądy w gałęziach w stanie nieustalonym, jeśli w chwili $t = 0$ został zamknięty łącznik W . Dane: $E = 40 \text{ V}$; $R_1 = 30 \Omega$; $R_2 = 10 \Omega$; $L = 1 \text{ H}$; $C = 1 \text{ mF}$; $u_C(0^-) = 10 \text{ V}$.



Rys. 5.11

ROZWIĄZANIE. Zastosujemy metodę operatorową. Schemat operatorowy obwodu jest podany na rys. 5.11b. Obwód ten rozwiążemy metodą oczkową. Obliczamy

$$Z_{11}(s) = R_1 + R_2 + sL$$

$$Z_{22}(s) = R_2 + \frac{1}{sC}$$

$$Z_{12}(s) = Z_{21}(s) = -R_2$$

$$E_{11}(s) = \frac{E}{s} + Li_L(0^-)$$

$$E_{22}(s) = -\frac{u_C(0^-)}{s}$$

Zgodnie z metodą oczkową

$$E_{11}(s) = Z_{11}(s)I'(s) + Z_{12}(s)I''(s)$$

$$E_{22}(s) = Z_{21}(s)I'(s) + Z_{22}(s)I''(s)$$

W postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} E_{11}(s) \\ E_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'(s) \\ I''(s) \end{bmatrix}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} \frac{40}{s} \\ -\frac{10}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 + s & -10 \\ -10 & 10 + \frac{10^3}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'(s) \\ I''(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I'(s) \\ I''(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 + s & -10 \\ -10 & 10 + \frac{10^3}{s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{40}{s} \\ -\frac{10}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10(3s + 400)}{s(s + 50)(s + 80)} \\ \frac{-s}{(s + 50)(s + 80)} \end{bmatrix}$$

$$I'(s) = I_L(s)$$

$$I''(s) = I_C(s)$$

Po przejściu do postaci czasowej

$$i_L(t) = \left(1 - \frac{5}{3}e^{-50t} + \frac{2}{3}e^{-80t} \right) \text{ A}$$

$$i_C(t) = \left(\frac{5}{3}e^{-50t} - \frac{8}{3}e^{-80t} \right) \text{ A}$$

Prąd w gałęzi z rezystancją R_2

$$i_R(t) = i_L(t) - i_C(t) = \left(1 - \frac{10}{3}e^{-50t} + \frac{10}{3}e^{-80t} \right) \text{ A}$$

5.12. W obwodzie jak na rys. 5.12a obliczyć prąd w gałęzi zawierającej rezystor R_3 , jeśli w chwili $t = 0$ został zamknięty łącznik W . Dane: $E = 20 \text{ V}$; $I_z = 2 \text{ A}$; $R_1 = R_2 = 5 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $R_4 = 2 \Omega$; $L = 2 \text{ H}$.

ROZWIĄZANIE. Zastosujemy metodę operatorową. Schemat operatorowy obwodu jest podany na rys. 5.12b. Obwód ten rozwiążemy metodą węzłową. Prąd $i_L(0^-)$ obliczymy metodą superpozycji (rys. 5.12c), nakładając na siebie prądy $i_L'(0^-)$ oraz $i_L''(0^-)$ płynące odpowiednio: w wyniku działania źródła napięcia E , przy rozwarciu źródła prądu I_z , oraz w wyniku działania źródła prądu I_z , przy zwarcu źródła napięcia E

$$i_L'(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2 \text{ A}$$

$$i_L''(0^-) = I_z \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_2} = 1 \text{ A}$$

$$i_L(0^-) = i_L'(0^-) - i_L''(0^-) = 1 \text{ A}$$

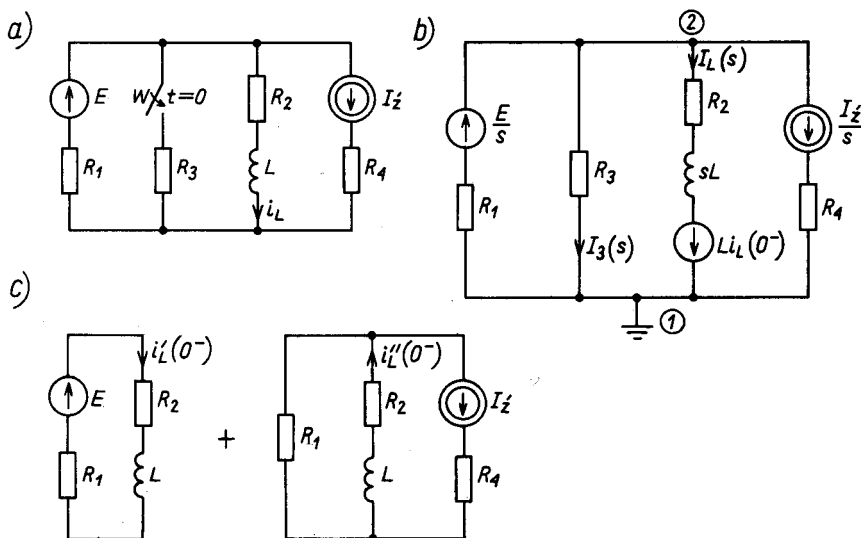
$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

Obwód z rys. 5.12b ma dwa węzły, zatem jeden węzeł jest niezależny. Potencjał węzła 2 jest wyrażony zależnością

$$V_2(s) = \frac{\frac{E}{sR_1} - \frac{Li_L(0^+)}{R_2 + sL} - \frac{I_z}{s}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + sL}}$$

Po podstawieniu danych i uporządkowaniu, otrzymujemy

$$V_2(s) = \frac{10(5 - s)}{3s(s + 4,166)}$$



Rys. 5.12

Zastosujemy wzór Heaviside'a (postać z wydzielonym pierwiastkiem zerowym)

$$v_2(t) = \frac{10}{3} \left[\frac{5}{4,166} - \frac{5 - 4,166}{4,166} e^{-4,166t} \right] = \left(4 - \frac{2}{3} e^{-4,166t} \right) \text{ V}$$

Prąd w gałęzi R_3

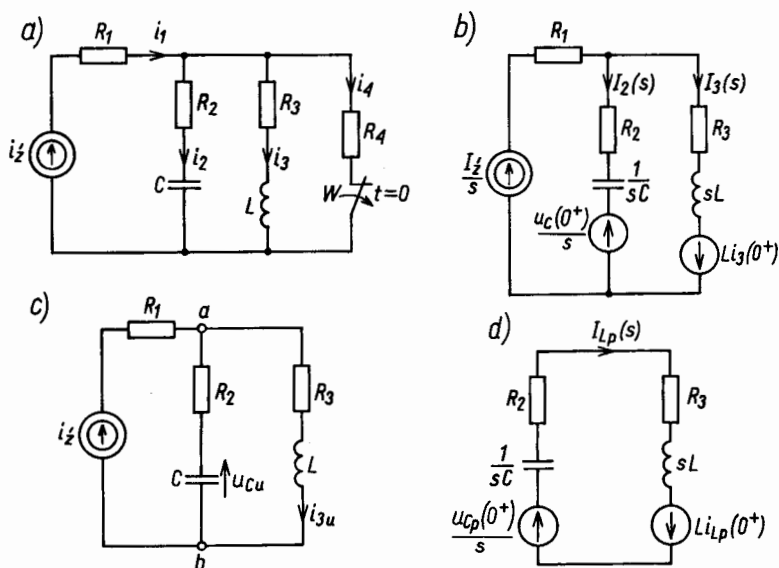
$$i_3(t) = \frac{v_2(t)}{R_3} = (0,4 - 0,067e^{-4,166t}) \text{ A}$$

5.13. W obwodzie przedstawionym na rys. 5.13a w chwili $t = 0$ nastąpiło otwarcie łącznika W . Obliczyć prądy w obwodzie oraz napięcie na kondensatorze:

a) przy wymuszeniu stałym $i_z = I_z = 10 \text{ A}$;

b) przy wymuszeniu sinusoidalnym $i_z = 10 \cos t \text{ A}$.

Dane: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2 \Omega$; $L = 2 \text{ H}$; $C = 0,5 \text{ F}$.



Rys. 5.13

ROZWIĄZANIE

a) Wymuszenie $i_z = I_z = 10 \text{ A}$. Warunki początkowe w obwodzie przed komutacją

$$u_C(0^-) = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} I_z = 10 \text{ V}$$

$$i_3(0^-) = \frac{u_C(0^-)}{R_3} = 5 \text{ A}$$

Schemat operatorowy obwodu przedstawiono na rys. 5.13b.

Korzystając z praw Kirchhoffa, otrzymamy

$$\frac{I_z}{s} = I_2(s) + I_3(s)$$

$$(R_3 + Ls) I_3(s) - L i_3(0^+) = \left(R_2 + \frac{1}{sC} \right) I_2(s) + \frac{u_C(0^+)}{s}$$

Po podstawieniu danych wyznaczamy transformatę prądu $I_3(s)$

$$I_3(s) = \frac{10 + 5s}{s(s+1)}$$

przebieg czasowy

$$i_3(t) = (10 - 5e^{-t}) \text{ A}$$

W celu wyznaczenia napięcia na kondensatorze obliczmy prąd

$$I_2(s) = \frac{I_z}{s} - I_3(s) = \frac{10}{s} - \frac{10 + 5s}{s(s+1)} = \frac{5}{s+1}$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_2(s) + \frac{u_C(0^+)}{s} = \frac{10}{s(s+1)} + \frac{10}{s}$$

Napięcie na kondensatorze w funkcji czasu

$$u_C(t) = (20 - 10e^{-t}) \text{ V}$$

Sprawdzamy warunek początkowy, obliczając $u_C(t)$ dla $t = 0$

$$u_C(0^+) = 20 - 10 = 10 \text{ V}$$

b) Wymuszenie $i_z = 10 \cos t = 10 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}$

$$\underline{I}_z = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} = j \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ A}$$

Określimy warunki początkowe. W tym celu obliczamy

$$\underline{Z}_{23} = \frac{(2 - j2)(2 + j2)}{4} = 2 \Omega$$

$$\underline{Z}_{234} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1 \Omega$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_{234} \underline{I}_z = 1j \frac{10}{\sqrt{2}} = j \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{j10}{\sqrt{2}(2 + j2)} = 2,5 e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$i_3(t) = i_L(t) = 2,5 \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}; \quad i_L(0^-) = 2,5 \text{ A} = i_L(0^+)$$

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} (-jX_C) = \frac{j10}{\sqrt{2}(2 - j2)} (-j2) = 5 e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ V}$$

$$u_C(t) = 5\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}$$

$$u_C(0^-) = 5 \text{ V} = u_C(0^+)$$

Obliczamy składowe ustalone napięcia na kondensatorze i prądu w cewce, korzystając ze schematu obwodu dla składowych ustalonych przedstawionego na rys. 5.13c

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = I_z \frac{\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{j10 \cdot 2}{\sqrt{2}(2 + j2)} = 5e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ A}$$

$$i_3(t) = i_{Lu}(t) = 5\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}; \quad i_{Lu}(0^+) = 5 \text{ A}$$

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} (-jX_C) = \frac{j20}{\sqrt{2}(2 - j2)} (-j2) = 10e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ V}$$

$$u_{Cu}(t) = 10\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}; \quad u_{Cu}(0^+) = 10 \text{ V}$$

Obliczamy składowe przejściowe napięcia na kondensatorze i prądu w cewce zgodnie z rys. 5.13d.

Składowa przejściowa prądu w chwili $t = 0$

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^+) - i_{Lu}(0^+) = 2,5 - 5 = -2,5 \text{ A}$$

Składowa przejściowa napięcia w chwili $t = 0$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^+) - u_{Cu}(0^+) = 5 - 10 = -5 \text{ V}$$

Dla obwodu z rys. 5.13d słuszne są następujące równania:

$$\left(R_2 + R_3 + Ls + \frac{1}{sC}\right) I_{Lp}(s) = Li_{Lp}(0^+) + \frac{u_{Cp}(0^+)}{s}$$

$$\left(\frac{2s^2 + 4s + 2}{s}\right) I_{Lp}(s) = -5 - \frac{5}{s} = -\frac{5(s+1)}{s}$$

$$I_{Lp}(s) = -\frac{5(s+1)}{2(s+1)^2} = -\frac{2,5}{s+1}$$

stąd

$$i_{Lp}(t) = -2,5e^{-t} \text{ A}$$

Całkowity prąd w cewce

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = \left[5\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 2,5e^{-t}\right] \text{ A}$$

Składowa przejściowa napięcia na kondensatorze

$$U_{Cp}(s) = -\frac{1}{sC} I_{Lp}(s) + \frac{u_{Cp}(0^+)}{s} = -\frac{2}{s} \left(-\frac{2,5}{s+1} \right) - \frac{5}{s}$$

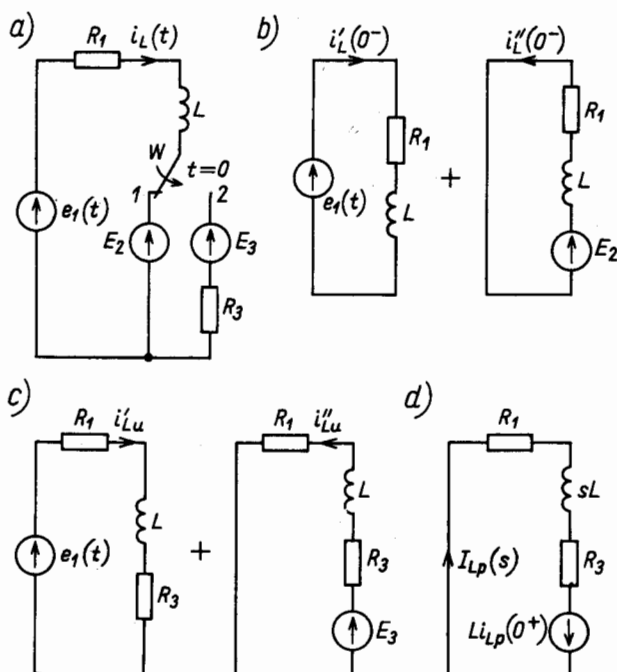
stąd

$$u_{Cp}(t) = (-5e^{-t}) \text{ V}$$

Całkowite napięcie na kondensatorze

$$u_C(t) = \left[10\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 5e^{-t} \right] \text{ V}$$

5.14. W obwodzie jak na rys. 5.14a w chwili $t = 0$ łącznik W przełączono z pozycji 1 w pozycję 2. Obliczyć prąd i_L w stanie nieustalonym. Dane: $R_1 = 20 \Omega$; $R_3 = 20 \Omega$; $L = 20 \text{ mH}$; $e_1(t) = 100 \sin(1000t + 90^\circ) \text{ V}$; $E_2 = 20 \text{ V}$; $E_3 = 30 \text{ V}$.



Rys. 5.14

ROZWIĄZANIE. Zadanie rozwiążemy metodą mieszaną, klasyczno-operatorową. Wyznaczamy warunki początkowe. Obwód jest obwodem pierwszego rzędu, a więc należy obliczyć prąd płynący przez cewkę w chwili $t = 0^-$. Ponieważ w obwodzie działają dwa źródła — źródło napięcia sinuso-

idalnie zmiennego $e_1(t)$ oraz źródło napięcia stałego E_2 — prąd $i_L(0^-)$ obliczymy metodą superpozycji (rys. 5.14b)

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i'_L(0^-) - i''_L(0^-)$$

W obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego

$$\underline{I}'_L = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + jX_L} = \frac{100e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}(20 + j20)} = 2,5e^{j45^\circ} \text{ A}$$

$$i'_L(t) = 2,5\sqrt{2} \sin(1000t + 45^\circ) \text{ A}$$

$$i'_L(0^-) = 2,5\sqrt{2} \sin 45^\circ = 2,5 \text{ A}$$

W obwodzie prądu stałego

$$i''_L(0^-) = \frac{E_2}{R_1} = \frac{20}{20} = 1 \text{ A}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2,5 - 1 = 1,5 \text{ A}$$

Składową ustaloną prądu obliczymy jak w metodzie klasycznej, przy czym również zastosujemy metodę superpozycji (rys. 5.14c)

$$\underline{I}'_{Lu} = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + R_3 + jX_L} = \frac{100e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}(40 + j20)} = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{j63^\circ} \text{ A}$$

$$i'_{Lu}(t) = \frac{5}{\sqrt{10}}\sqrt{2} \sin(1000t + 63^\circ) = \sqrt{5} \sin(1000t + 63^\circ) \text{ A}$$

$$i'_{Lu}(0^+) = \sqrt{5} \sin 63^\circ = 2 \text{ A}$$

$$i''_{Lu}(0^+) = \frac{E_3}{R_1 + R_3} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \text{ A}$$

Składowa ustalona w chwili $t = 0^+$

$$i_{Lu}(0^+) = i'_{Lu}(0^+) - i''_{Lu}(0^+) = 2 - 0,75 = 1,25 \text{ A}$$

Składowa ustalona w chwili t wynosi

$$i_{Lu}(t) = [-0,75 + \sqrt{5} \sin(1000t + 63^\circ)] \text{ A}$$

Składową przejściową obliczymy metodą operatorową (rys. 5.14d).

Obliczamy składową przejściową w chwili $t = 0^+$

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^+) - i_{Lu}(0^+) = 1,5 - 1,25 = 0,25 \text{ A}$$

$$I_{Lp}(s) = \frac{L i_{Lp}(0^+)}{R_1 + R_3 + sL} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,25}{40 + 2 \cdot 10^{-2}s}$$

stąd

$$i_{Lp}(t) = 0,25 e^{-2000t}$$

Całkowity prąd $i_L(t)$ będący sumą składowej ustalonej i składowej przejściowej wynosi

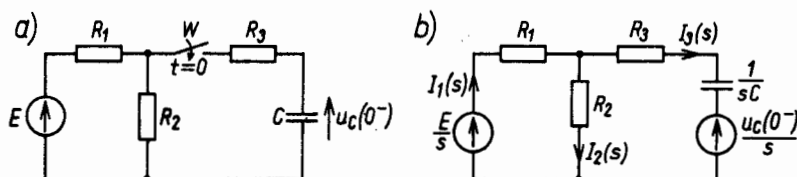
$$i_L(t) = [-0,75 + \sqrt{5} \sin(1000t + 63^\circ) + 0,25 e^{-2000t}] \text{ A}$$

5.15. W obwodzie jak na rys. 5.15a zamknięto łącznik w chwili $t = 0$. Obliczyć napięcie na kondensatorze $u_C(t)$ w stanie nieustalonym:

a) metodą praw Kirchhoffa,

b) przy zastosowaniu twierdzenia Thevenina.

Dane: $E = 120 \text{ V}$ — napięcie stałe; $R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 80 \Omega$; $R_3 = 120 \Omega$; $C = 15 \mu\text{F}$; $u_C(0^-) = 40 \text{ V}$.



Rys. 5.15

ROZWIĄZANIE

a) Na rysunku 5.15b przedstawiono schemat operatorowy obwodu z rys. 5.15a. Na podstawie praw Kirchhoffa

$$\frac{E}{s} = R_1 I_1(s) + R_2 I_2(s)$$

$$\frac{u_C(0^-)}{s} = R_2 I_2(s) - R_3 I_3(s) - \frac{1}{sC} I_3(s)$$

$$I_1(s) = I_2(s) + I_3(s)$$

Układ równań rozwiązujemy względem $I_3(s)$ i otrzymujemy

$$I_3(s) = \frac{5600 C}{13600 s C + 100}$$

Napięcie na kondensatorze

$$\begin{aligned} U_C(s) &= \frac{1}{sC} I_3(s) + \frac{u_C(0^-)}{s} = \frac{5600}{s(13600 \cdot 15 \cdot 10^{-6} s + 100)} + \frac{40}{s} = \\ &= \frac{5600}{s(0,2s + 100)} + \frac{40}{s} = \frac{28000}{s(s + 500)} + \frac{40}{s} \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru Heaviside'a otrzymamy

$$u_C(t) = (96 - 56 e^{-500t}) \text{ V}$$

b) Korzystając z twierdzenia Thevenina, obliczamy napięcie na otwartym łączniku

$$U_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 - u_C(0^-) = \frac{120}{100} \cdot 80 - 40 = 56 \text{ V}$$

i jego transformatę

$$U_0(s) = \frac{56}{s}$$

Impedancja operatorowa widziana z zacisków otwartego łącznika przy zwarcie źródła napięcia

$$Z(s) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{1}{sC} = \frac{20 \cdot 80}{20 + 80} + 120 + \frac{10^6}{15s} = \frac{2000s + 10^6}{15s}$$

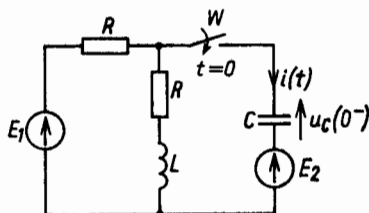
$$I_3(s) = \frac{U_0(s)}{Z(s)} = \frac{56 \cdot 15s}{s(2000s + 10^6)} = \frac{56 \cdot 15}{2000s + 10^6}$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_3(s) + \frac{40}{s} = \frac{56 \cdot 15 \cdot 10^6}{15s(2000s + 10^6)} + \frac{40}{s} = \frac{28000}{s(s + 500)} + \frac{40}{s}$$

stąd

$$u_C(t) = (96 - 56 e^{-500t}) \text{ V}$$

5.16. Obliczyć przebieg napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 5.16, jeżeli w chwili $t = 0$ zamknięto łącznik W . Zastosować metodę Thevenina. Dane: $E_1 = 50 \text{ V}$; $E_2 = 10 \text{ V}$; $R = 5 \Omega$; $L = 2 \text{ H}$; $C = 1 \text{ F}$; $u_C(0^-) = 5 \text{ V}$.



Rys. 5.16

ROZWIĄZANIE. Obliczamy napięcie na otwartym łączniku w chwili $t = 0^-$

$$U_0 = \frac{E_1}{2R} R - E_2 - u_C(0^-) = 10 \text{ V}$$

Transformata tego napięcia

$$U_0(s) = \frac{10}{s}$$

Impedancja widziana z zacisków otwartego łącznika przy zwarcu źródeł napięcia, wynosi

$$Z(s) = \frac{R(R + sL)}{2R + sL} + \frac{1}{sC} = \frac{10s^2 + 27s + 10}{2s(s + 5)}$$

Prąd w gałęzi kondensatora

$$I(s) = \frac{U_0(s)}{Z(s)} = \frac{2(s + 5)}{s^2 + 2,7s + 1}$$

Napięcie na zaciskach kondensatora

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_C(0^+)}{s} = \frac{2s + 10}{s(s^2 + 2,7s + 1)} + \frac{5}{s}$$

Obliczamy pierwiastki równania

$$s^2 + 2,7s + 1 = 0; \quad s_1 \approx -0,45, \quad s_2 \approx -2,25$$

Przedstawimy napięcie na kondensatorze w postaci

$$U_C(s) = \frac{2s + 10}{s(s + 0,45)(s + 2,25)} + \frac{5}{s}$$

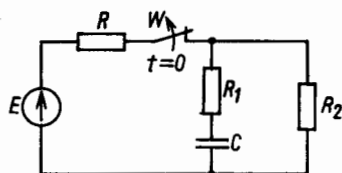
Korzystamy z twierdzenia o residuach

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=0} \left[\frac{2s + 10}{s(s + 0,45)(s + 2,25)} e^{st} \right] &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{2s + 10}{(s + 0,45)(s + 2,25)} \right] = 10 \\ \operatorname{res}_{s=-0,45} \left[\frac{2s + 10}{s(s + 0,45)(s + 2,25)} e^{st} \right] &= \lim_{s \rightarrow -0,45} \left[\frac{2s + 10}{s(s + 2,25)} e^{st} \right] \approx -11,3 e^{-0,45t} \\ \operatorname{res}_{s=-2,25} \left[\frac{2s + 10}{s(s + 0,45)(s + 2,25)} e^{st} \right] &= \lim_{s \rightarrow -2,25} \left[\frac{2s + 10}{s(s + 0,45)} e^{st} \right] \approx 1,3 e^{-2,25t} \end{aligned}$$

Ostatecznie napięcie na kondensatorze

$$u_C(t) = 10 - 11,3 e^{-0,45t} + 1,3 e^{-2,25t} + 5 = (15 - 11,3 e^{-0,45t} + 1,3 e^{-2,25t}) \text{ V}$$

5.17. W obwodzie jak na rys. 5.17 w chwili $t = 0$ został otwarty łącznik W . Obliczyć przebieg napięcia $u(t)$ na otwartym łączniku. Zastosować metodę Nortona. Dane: $E = 30 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 10 \Omega$; $R = 5 \Omega$; $C = 10 \text{ mF}$.



Rys. 5.17

ROZWIĄZANIE. Prąd w gałęzi łącznika przed otwarciem wynosi

$$I = \frac{E}{R + R_2} = \frac{30}{15} = 2 \text{ A}$$

Impedancja operatorowa widziana z zacisków łącznika przy zwarcu źródła napięcia wynosi

$$Z(s) = R + \frac{R_2 \left(R_1 + \frac{1}{sC} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = 5 + \frac{10 \left(10 + \frac{100}{s} \right)}{20 + \frac{100}{s}} = \frac{10s + 75}{s + 5}$$

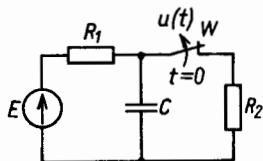
Napięcie na wyłączniku

$$U(s) = Z(s)I(s) = \frac{2}{s} \frac{10s + 75}{s + 5} = \frac{20s + 150}{s(s + 5)}$$

Przebieg czasowy tego napięcia

$$u(t) = 30 - 10 e^{-5t} \text{ V}$$

5.18. W obwodzie jak na rys. 5.18 w chwili $t = 0$ otwarto łącznik W. Metodą Nortona obliczyć przebieg napięcia $u(t)$ na otwartym łączniku. Dane: $E = 30 \text{ V}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $C = 2 \text{ F}$.



Rys. 5.18

ROZWIĄZANIE. Prąd płynący w gałęzi łącznika przed jego otwarciem wynosi

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{30}{1 + 2} = 10 \text{ A}$$

Transformata tego prądu

$$I(s) = \frac{I}{s} = \frac{10}{s}$$

Impedancja operatorowa widziana z zacisków łącznika

$$Z(s) = R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}} = 2 + \frac{1}{2s+1} = \frac{4s+3}{2s+1}$$

Napięcie na zaciskach łącznika po jego otwarciu

$$U(s) = Z(s)I(s) = \frac{4s+3}{2s+1} \frac{10}{s} = \frac{40s+30}{s(2s+1)} = \frac{20s+15}{s(s+0,5)}$$

stąd

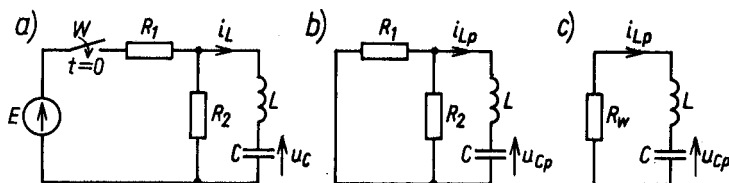
$$u(t) = (30 - 10e^{-0,5t}) \text{ V}$$

Napięcie to w chwili $t = 0^+$, $u(0^+) = 20 \text{ V}$.

Rzeczywiście, w chwili tuż przed otwarciem łącznika napięcie na kondensatorze, równe napięciu na rezystorze R_2 , wynosiło $u_C(0^-) = R_2 I = 20 \text{ V}$. Z prawa komutacji wynika, że $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 20 \text{ V}$.

5.4. Metoda zmiennych stanu

5.19. W obwodzie jak na rys. 5.19a obliczyć prąd w cewce oraz napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym powstałym w wyniku zamknięcia łącznika w chwili $t = 0$. Zastosować metodę zmiennych stanu. Dane: $E = 100 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 50 \Omega$; $L = 1 \text{ H}$; $C = 10 \text{ mF}$.



Rys. 5.19

ROZWIĄZANIE. Określamy prąd w cewce oraz napięcie na kondensatorze w stanie zerowym

$$i_L(0^-) = 0; \quad u_C(0^-) = 0$$

Wartości ustalone prądu i napięcia

$$i_{Lu} = 0 \text{ A}$$

$$u_{Cu} = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{100}{100} \cdot 50 = 50 \text{ V}$$

Schemat obwodu dla składowych przejściowych przedstawiono na rys. 5.19b, a po przekształceniu na rys. 5.19c. Dla tego schematu układamy równania

$$i_{Lp} = C \frac{du_{Cp}}{dt}$$

$$R_w i_{Lp} + u_{Cp} + L \frac{di_{Lp}}{dt} = 0$$

Wybieramy zmienne stanu

$$x_{1p} = u_{Cp}; \quad x_{2p} = i_{Lp}$$

Formułujemy równanie stanu

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{Cp}}{dt} \\ \frac{di_{Lp}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_w}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cp} \\ i_{Lp} \end{bmatrix}$$

Skąd po podstawieniu danych oraz $\frac{du_{Cp}}{dt} = \dot{x}_{1p}(t)$; $\frac{di_{Lp}}{dt} = \dot{x}_{2p}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1p}(t) \\ \dot{x}_{2p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ -1 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1p}(t) \\ x_{2p}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A} \mathbf{x}_p, \quad \text{przy czym} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ -1 & -25 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania stanu

$$\mathbf{x}_p = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_p(0)$$

Określamy stan początkowy dla składowych przejściowych

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^+) - i_{Lu}(0^+) = 0$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^+) - u_{Cu}(0^+) = -50 \text{ V}$$

Macierz stanu początkowego dla składowych przejściowych

$$\mathbf{x}_p(0) = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wartości własne macierzy $\mathbf{A}$.

Równanie charakterystyczne

$$|\lambda \mathbf{1} - \mathbf{A}| = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -100 \\ 1 & \lambda + 25 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda + 100 = 0$$

Wartości własne

$$\lambda_1 = -5; \quad \lambda_2 = -20$$

Do obliczenia macierzy $e^{\mathbf{A}t}$ zastosujemy dwie metody:

- metodę wzoru Sylwestera,
- metodę rozwinięcia w szereg skończony (metodę Cayleya-Hamiltona).

Metoda wzoru Sylwestera

Wzór Sylwestera dla dwóch wartości własnych λ_1 i λ_2 ma postać

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t} \frac{\lambda_2 \mathbf{1} - \mathbf{A}}{\lambda_2 - \lambda_1} + e^{\lambda_2 t} \frac{\lambda_1 \mathbf{1} - \mathbf{A}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Zatem

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= e^{-5t} \left(-\frac{1}{15} \right) \begin{bmatrix} -20 & -100 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + e^{-20t} \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -5 & -100 \\ 1 & 20 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-5t} - \frac{1}{3}e^{-20t} & \frac{20}{3}e^{-5t} - \frac{20}{3}e^{-20t} \\ -\frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{1}{15}e^{-20t} & -\frac{1}{3}e^{-5t} + \frac{4}{3}e^{-20t} \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_p &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-5t} - \frac{1}{3}e^{-20t} & \frac{20}{3}e^{-5t} - \frac{20}{3}e^{-20t} \\ -\frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{1}{15}e^{-20t} & -\frac{1}{3}e^{-5t} + \frac{4}{3}e^{-20t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{200}{3}e^{-5t} + \frac{50}{3}e^{-20t} \\ \frac{10}{3}e^{-5t} - \frac{10}{3}e^{-20t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zatem

$$x_{1p} = u_{Cp} = \frac{50}{3}e^{-20t} - \frac{200}{3}e^{-5t}$$

$$x_{2p} = i_{Lp} = \frac{10}{3}e^{-5t} - \frac{10}{3}e^{-20t}$$

Napięcie na kondensatorze

$$u_C(t) = u_{Cu} + u_{Cp} = \left(50 + \frac{50}{3}e^{-20t} - \frac{200}{3}e^{-5t} \right) \text{ V}$$

Prąd w cewce

$$i_L(t) = i_{Lu} + i_{Lp} = \left(0 + \frac{10}{3}e^{-5t} - \frac{10}{3}e^{-20t} \right) \text{ A}$$

Metoda rozwinięcia w szereg skończony (metoda Cayleya-Hamiltona)

Przy dwóch wartościach własnych

$$e^{At} = \alpha_0(t) \mathbf{1} + \alpha_1(t) A$$

w celu obliczenia współczynników $\alpha_0(t)$ oraz $\alpha_1(t)$ piszemy dwa równania

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_1; \quad \lambda_1 = -5$$

$$e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_2; \quad \lambda_2 = -20$$

stąd

$$e^{-5t} = \alpha_0(t) - 5\alpha_1(t)$$

$$e^{-20t} = \alpha_0(t) - 20\alpha_1(t)$$

stąd

$$\alpha_0(t) = \frac{4}{3}e^{-5t} - \frac{1}{3}e^{-20t}$$

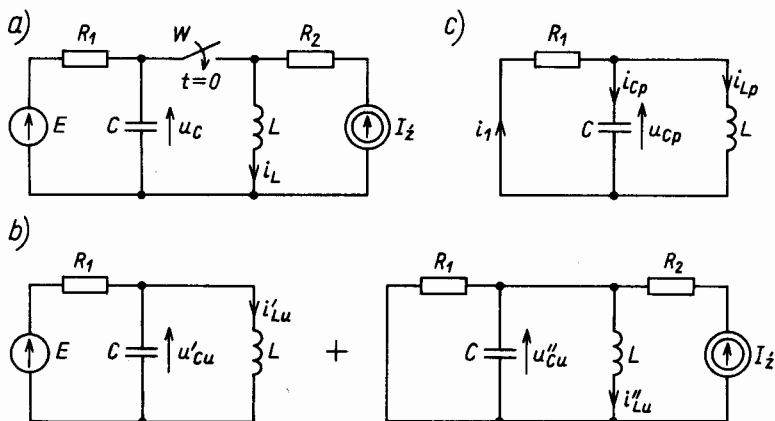
$$\alpha_1(t) = \frac{1}{15}e^{-5t} - \frac{1}{15}e^{-20t}$$

Mając współczynniki $\alpha_0(t)$ i $\alpha_1(t)$ można obliczyć wykładniczą funkcję macierzy

$$\begin{aligned} e^{At} &= \left(\frac{4}{3}e^{-5t} - \frac{1}{3}e^{-20t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{15}e^{-5t} - \frac{1}{15}e^{-20t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ -1 & -25 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-5t} - \frac{1}{3}e^{-20t} & \frac{20}{3}e^{-5t} - \frac{20}{3}e^{-20t} \\ -\frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{1}{15}e^{-20t} & -\frac{1}{3}e^{-5t} + \frac{4}{3}e^{-20t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wynik zgodny z wynikiem uzyskanym metodą Sylwestera.

5.20. W obwodzie jak na rys. 5.20a w chwili $t = 0$ został zamknięty łącznik W . Obliczyć prąd płynący przez cewkę oraz napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym. Obliczenie przeprowadzić metodą zmiennych stanu. Dane: $E = 5 \text{ V}$; $I_z = 2 \text{ A}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 4 \Omega$; $C = 125 \text{ mF}$; $L = 8/7 \text{ H}$.



Rys. 5.20

ROZWIĄZANIE. Stan początkowy obwodu jest następujący:

$$u_C(0^-) = E = 5 \text{ V}$$

$$i_L(0^-) = I_z = 2 \text{ A}$$

Składowe ustalone obliczamy metodą superpozycji (rys. 5.20b):

— od źródła napięcia stałego E (przy rozwarciu źródła prądu I_z)

$$i'_{Lu} = \frac{E}{R_1} = 5 \text{ A}; \quad u'_{Cu} = 0$$

— od źródła prądu stałego (przy zwarceniu źródła napięcia E)

$$i''_{Lu} = 2 \text{ A}; \quad u''_{Cu} = 0$$

stąd

$$i_{Lu} = i'_{Lu} + i''_{Lu} = 7 \text{ A}$$

$$u_{Cu} = 0$$

Równania dla składowych przejściowych metodą zmiennych stanu układamy na podstawie praw Kirchhoffa, korzystając ze schematu na rys. 5.20c

$$i_1 = i_{Cp} + i_{Lp} = C \frac{du_{Cp}}{dt} + i_{Lp}$$

$$R_1 \left(C \frac{du_{Cp}}{dt} + i_{Lp} \right) + u_{Cp} = 0$$

$$u_{Cp} = L \frac{di_{Lp}}{dt}$$

Wybieramy zmienne stanu $i_{Lp} = x_{1p}$; $u_{Cp} = x_{2p}$ i formułujemy równanie stanu

$$\dot{x}_{1p} = \frac{1}{L} x_{2p}$$

$$\dot{x}_{2p} = -\frac{1}{C} x_{1p} - \frac{1}{R_1 C} x_{2p}$$

W postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1p} \\ \dot{x}_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{bmatrix}$$

Macierz stanu po podstawieniu danych

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0, \quad \text{stąd } \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -7$$

Obliczamy $e^{\mathbf{A}t}$ metodą wzoru Sylwestera

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & \frac{7}{8} \\ -8 & -1 \end{bmatrix} - e^{-7t} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{8} \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania stanu ma postać

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_p(0)$$

przy czym

$$\mathbf{x}_p(0) = \begin{bmatrix} x_{1p}(0) \\ x_{2p}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_L(0^+) - i_{Lu} \\ u_C(0^+) - u_{Cu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 7 \\ 5 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\mathbf{x}_p = \left\{ e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & \frac{7}{8} \\ -8 & -1 \end{bmatrix} - e^{-7t} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{8} \\ -8 & -7 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{48} e^{-7t} - \frac{245}{48} e^{-t} \\ \frac{35}{6} e^{-t} - \frac{5}{6} e^{-7t} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie

$$i_L(t) = i_{Lu} + i_{Lp} = \left(7 + \frac{5}{48} e^{-7t} - \frac{245}{48} e^{-t} \right) \text{ A}$$

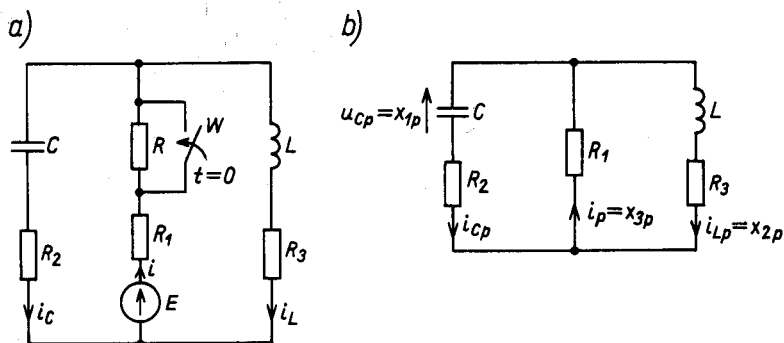
$$u_C(t) = u_{Cu} + u_{Cp} = \left(\frac{35}{6} e^{-t} - \frac{5}{6} e^{-7t} \right) \text{ V}$$

Sprawdzamy warunki początkowe dla $t = 0^+$

$$i_L(0^+) = 7 - 5 = 2 \text{ A}$$

$$u_C(0^+) = 5 \text{ V}$$

5.21. W obwodzie jak na rys. 5.21a w chwili $t = 0$ został zamknięty łącznik W . Metodą zmiennych stanu obliczyć prąd w cewce i napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym. Dane: $E = 100 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \Omega$; $C = 0,5 \text{ F}$; $L = 2 \text{ H}$; $R = 1 \Omega$.



Rys. 5.21

ROZWIĄZANIE. Obliczamy prąd w cewce i napięcie na kondensatorze w stanie zerowym

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{E}{R_1 + R + R_3} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}$$

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = \frac{E}{R_1 + R + R_3} R_3 = 40 \text{ V}$$

Obliczamy prąd w cewce i napięcie na kondensatorze w stanie ustalonym

$$i_{Lu} = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{100}{4} = 25 \text{ A}$$

$$u_{Cu} = R_3 i_{Lu} = 50 \text{ V}$$

Jako zmienne stanu wybieramy napięcie na kondensatorze i prąd cewki

$$x_1(t) = u_C(t)$$

$$x_2(t) = i_L(t)$$

Tworzymy schemat dla składowych przejściowych (rys. 5.21b) i formułujemy równanie stanu dla składowych przejściowych. Prąd x_{3p} na schemacie nie jest zmienną stanu. Zgodnie z prawami Kirchhoffa

$$i_p = i_{Cp} + i_{Lp}$$

$$u_{Cp} + R_2 i_{Cp} + R_1 i_p = 0$$

$$R_3 i_{Lp} + L \frac{di_{Lp}}{dt} + R_1 i_p = 0$$

Stąd po uwzględnieniu przyjętych oznaczeń

$$x_{3p} = C \frac{dx_{1p}}{dt} + x_{2p}$$

$$x_{1p} + R_2 C \frac{dx_{1p}}{dt} + R_1 \left(C \frac{dx_{1p}}{dt} + x_{2p} \right) = 0$$

$$R_3 x_{2p} + L \frac{dx_{2p}}{dt} + R_1 \left(C \frac{dx_{1p}}{dt} + x_{2p} \right) = 0$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$\dot{x}_{1p} = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} x_{1p} - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} x_{2p}$$

$$\dot{x}_{2p} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} x_{1p} - \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{(R_1 + R_2)L} x_{2p}$$

Równanie stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1p} \\ \dot{x}_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{bmatrix}$$

Zatem

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{4} & -\frac{2}{4 \cdot 0,5} \\ \frac{2}{4 \cdot 2} & -\frac{12}{4 \cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \lambda + \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0; \quad \text{stąd} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Macierz A ma podwójną wartość własną $\lambda_{1,2} = -1$.

W celu obliczenia funkcji macierzy e^{At} wykorzystujemy metodę Cayleya-Hamiltona

$$e^{At} = \alpha_0(t) \mathbf{1} + \alpha_1(t) A$$

Aby obliczyć $\alpha_0(t)$ oraz $\alpha_1(t)$, stosujemy równanie

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_1$$

$$\frac{de^{\lambda_2 t}}{d\lambda_2} = \frac{d}{d\lambda_2} \left[\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_2 \right]$$

czyli

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_1$$

$$t e^{\lambda_2 t} = \alpha_1(t)$$

a więc

$$e^{-t} = \alpha_0(t) - \alpha_1(t)$$

$$t e^{-t} = \alpha_1(t)$$

stąd

$$\alpha_1(t) = t e^{-t}$$

$$\alpha_0(t) = t e^{-t} + e^{-t} = e^{-t} (t + 1)$$

Funkcja macierzy

$$e^{At} = (t e^{-t} + e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t e^{-t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p = e^{At} \mathbf{x}_p(0)$$

W celu wyznaczenia macierzy $\mathbf{x}_p(0)$ obliczamy

$$x_{1p}(0) = u_{Cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu} = 40 - 50 = -10 \text{ V}$$

$$x_{2p}(0) = i_{Lp}(0) = i_L(0) - i_{Lu} = 20 - 25 = -5 \text{ A}$$

Zatem

$$\mathbf{x}_p(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p &= \left\{ \begin{bmatrix} t e^{-t} + e^{-t} & 0 \\ 0 & t e^{-t} + e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,5 t e^{-t} & -t e^{-t} \\ 0,25 t e^{-t} & -1,5 t e^{-t} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -10 e^{-t} \\ -5 e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$u_{Cp}(t) = x_{1p} = -10 e^{-t} \text{ V}$$

$$i_{Lp}(t) = x_{2p} = -5 e^{-t} \text{ A}$$

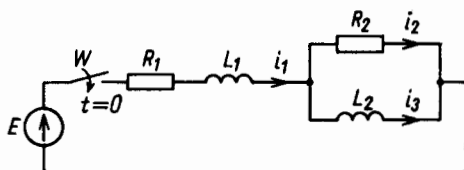
Uwzględniając obliczone uprzednio składowe ustalone, otrzymamy

$$u_C(t) = u_{Cu} + u_{Cp} = (50 - 10e^{-t}) \text{ V}$$

$$i_L(t) = i_{Lu} + i_{Lp} = (25 - 5e^{-t}) \text{ A}$$

5.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

5.22. Obwód przedstawiony na rys. 5.22 znajduje się w stanie zerowym. Obliczyć prądy w stanie nieustalonym powstałym po zamknięciu łącznika W w chwili $t = 0$. Dane: $E = 96 \text{ V}$; $R_1 = 160 \Omega$; $R_2 = 90 \Omega$; $L_1 = 0,1 \text{ H}$; $L_2 = 0,036 \text{ H}$.



Rys. 5.22

Odpowiedź

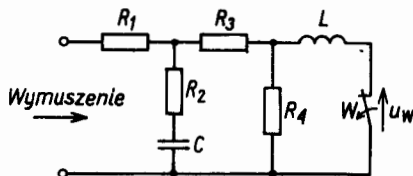
$$i_2 = (0,6 - 0,8e^{-1000t} + 0,2e^{-4000t}) \text{ A}$$

$$i_3 = 0,32(e^{-1000t} - e^{-4000t}) \text{ A}$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

5.23. W obwodzie jak na rys. 5.23 w chwili $t = 0$ nastąpiło otwarcie łącznika W . Obliczyć napięcie na zaciskach otwartego łącznika w stanie nieustalonym dla dwóch przypadków:

- wymuszenia napięciowego E ,
- wymuszenia prądowego I .



Rys. 5.23

Dane: $E = 10 \text{ V}$ — napięcie stałe; $I = 10 \text{ A}$ — prąd stały; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$; $C = 10 \text{ mF}$; $L = 0,1 \text{ H}$.

Odpowiedź

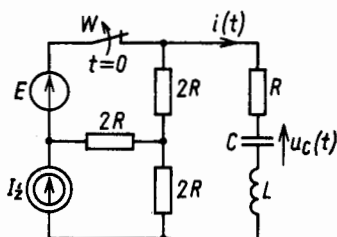
a) przy wymuszeniu napięciowym

$$u_w = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{30} e^{-6t} \right) \text{ V}$$

b) przy wymuszeniu prądowym

$$u_w = 100 \left(1 - \frac{1}{3} e^{-\frac{10}{3}t} \right) \text{ V}$$

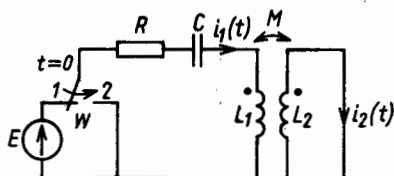
5.24. W obwodzie przedstawionym na rys. 5.24 w chwili $t = 0$ otwarto łącznik W . Obliczyć prąd $i_L(t)$ płynący przez cewkę oraz napięcie $u_C(t)$ na kondensatorze w stanie nieustalonym. Dane: $E = 10 \text{ V}$; $I_z = 5 \text{ A}$; $R = 1 \Omega$; $L = 5 \text{ H}$; $C = 1 \text{ F}$.

**Rys. 5.24****Odpowiedź**

$$i_L(t) = 10 e^{-0,4t} \sin 0,2 t \text{ A}$$

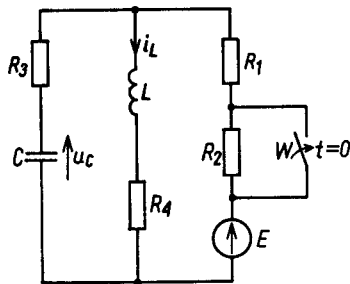
$$u_C(t) = [5 + 10 e^{-0,4t} (-2 \sin 0,2 t - \cos 0,2 t)] \text{ V}$$

5.25. W obwodzie jak na rys. 5.25 w chwili $t = 0$ przełączono łącznik z pozycji 1 w pozycję 2. Podać taki warunek dla pojemności C , przy której przebiegi w stanie nieustalonym nie będą miały charakteru oscylacyjnego. Dane: $E = 10 \text{ V}$; $L_1 = L_2 = 1 \text{ H}$; $M = 0,5 \text{ H}$; $R = 5 \Omega$.

**Rys. 5.25**

Odpowiedź. Przy $C > 120 \text{ mF}$ nie wystąpią w obwodzie drgania oscylacyjne.

5.26. Obliczyć napięcie na kondensatorze oraz prąd w cewce metodą operatorową. Stan nieustalony powstaje w obwodzie (rys. 5.26) w wyniku zamknięcia łącznika W w chwili $t = 0$. Dane: $E = 150 \text{ V}$ — napięcie stałe; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$; $L = 2 \text{ H}$; $C = 0,5 \text{ F}$.



Rys. 5.26

Odpowiedź

$$i_L(t) = (7,5 - 1,66 e^{-7,5t} - 0,84 e^{-0,1t}) \text{ A}$$

$$u_C(t) = (75 - 0,338 e^{-7,5t} - 24,662 e^{-0,1t}) \text{ V}$$

6

Modelowanie i symulacja komputerowa obwodów elektrycznych

6.1. Modelowanie równań algebraicznych strukturami obwodowymi

6.1. Dany jest układ niezależnych równań algebraicznych o postaci

$$y_1 = 2x_1 + 3x_2$$

$$y_2 = -x_1 + x_2$$

Określić schemat obwodu elektrycznego będącego modelem obwodowym powyższego układu równań.

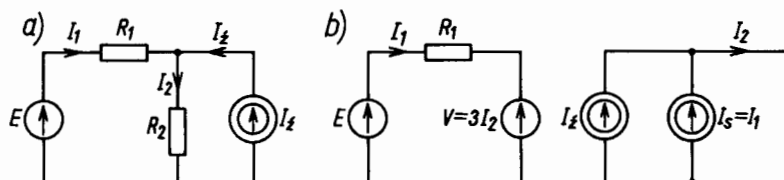
ROZWIĄZANIE. Model obwodowy układu równań algebraicznych można wyznaczyć postępując w dwojaki sposób. Pierwszy z nich — nie zawsze możliwy do zastosowania — to znalezienie takiej struktury obwodowej, np. pasywnej, której opis wynikający z praw Kirchhoffa i Ohma jest tożsamy w jego ogólnej postaci z modelowanymi równaniami. Należy jednak pamiętać, że jeśli niewiadomymi są zmienne rzeczywiste, to obwodem modelującym może być zarówno obwód rezystancyjny zasilany napięciami lub/i prądami źródłowymi stałymi w funkcji czasu, jak i obwód rezystancyjny zasilany ze źródeł napięcia lub/i prądu sinusoidalnie zmiennych w funkcji czasu, o takich samych fazach początkowych, i opisywany równaniami względem wartości maksymalnych lub skutecznych. Gdy zmienne są wielkościami zespolonymi, wówczas modelem obwodowym takiego układu może być obwód zawierający w przypadku ogólnym elementy R , L , C i M , zasilany ze źródeł generujących sygnały sinusoidalnie zmienne w funkcji czasu — przedstawione w postaci zespolonej. Drugi, bardziej uniwersalny sposób znalezienia modelu obwodowego układu równań algebraicznych, to wykorzystanie źródeł sterowanych.

Rozpatrując powyższy układ równań np. można przyjąć, że $y_1 = E$ jest napięciem źródłowym, a $y_2 = I_z$ — prądem źródłowym. Wówczas pierwsze z równań określa bilans napięć w oczku obwodu elektrycznego, drugie zaś bilans prądów w węźle. Zatem zmienne x_1 i x_2 muszą być prądami, np. $x_1 = I_1$, $x_2 = I_2$, a współczynniki w pierwszym równaniu — rezystancjami $R_1 = 2 \Omega$ i $R_2 = 3 \Omega$. Obwodem elektrycznym opisanym równaniami

$$E = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

$$I_z = -I_1 + I_2$$

jest np. obwód o strukturze pokazanej na rys. 6.1a.



Rys. 6.1

Posługując się źródłami sterowanymi, każdemu z równań można przyporządkować obwód szeregowy lub równoległy. W obwodzie tym człon lub człony, które nie mogą być wyrażone przez napięcia lub prądy na elementach pasywnych, modelujemy źródłami sterowanymi. Badany układ równań — pozostając przy sygnałach elektrycznych przypisanych wielkościom y_1 i y_2 oraz niewiadomym x_1 i x_2 — możemy przedstawić w postaci

$$E = R_1 I_1 + V$$

$$I_z = -I_s + I_2$$

W równaniach tych $V = 3I_2$ jest źródłem napięcia sterowanym prądem I_2 , natomiast $I_s = I_1$ źródłem prądu sterowanym prądem I_1 . Na rysunku 6.1b pokazano schemat obwodu, którego opis wynikający z praw Kirchhoffa jest tożsamy z powyższym układem równań.

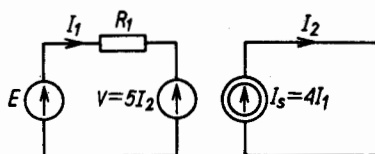
Stosowanie źródeł sterowanych w procesie modelowania jest szczególnie dogodnie w przypadkach, gdy chcemy rozwiązać analizowany układ wykorzystując program komputerowy przystosowany do analizy obwodów elektrycznych o znanej strukturze. Z tego względu w kolejnych zadaniach będzie preferowane modelowanie tą metodą.

6.2. Określić schemat obwodu elektrycznego, który zawiera elementy aktywne i jest modelem obwodowym niezależnego układu następujących równań algebraicznych:

$$y_1 = 10x_1 + 5x_2$$

$$0 = -4x_1 + x_2$$

ROZWIĄZANIE. Struktura modelu obwodowego zawierającego źródła sterowane zależy od przyjętych analogii wielkości występujących w równaniach i sygnałów elektrycznych. Jeśli np. przyjmiemy, że znana wielkość $y_1 = E$ jest napięciem źródłowym, to pierwsze z równań określa bilans napięć w oczku obwodu elektrycznego, zawierającego rezystor $R_1 = 10 \Omega$ i połączone z nim szeregowo źródło napięcia $V = 5I_2$ sterowane prądem. Zatem analogiem niewiadomej x_1 jest prąd I_1 płynący w tym obwodzie, niewiadomej x_2 zaś — prąd I_2 płynący w innym oczku obwodu. Przy takich założeniach dogodnie jest przyjąć, że drugie równanie wyraża bilans prądów w układzie o zwartych zaciskach wyjściowych, zawierającym źródło prądu $I_s = 4I_1$ sterowane prądem. Uwzględniając powyższe założenia, obwód modelujący podany układ równań ma postać pokazaną na rys. 6.2.



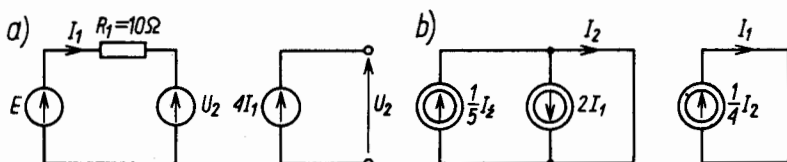
Rys. 6.2

Obwód ten opisują równania

$$E = R_1 I_1 + V$$

$$0 = -I_s + I_2$$

6.3. Dla równań określonych w zadaniu 6.2 wyznaczyć modele obwodowe, w których przyjęto następujące analogie: a) $y_1 = E$; $x_1 = I_1$; $x_2 = U_2$, b) $y_1 = I_s$; $x_1 = I_1$; $x_2 = I_2$.



Rys. 6.3

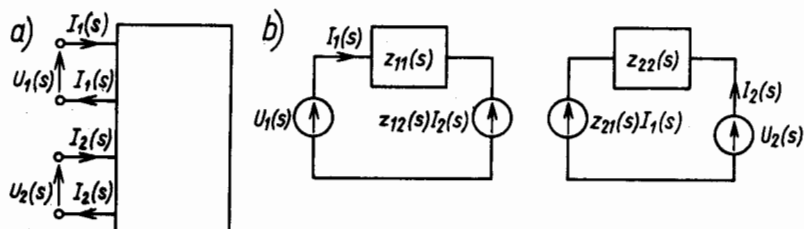
Odpowiedź. Na rysunku 6.3a i b przedstawiono schematy obwodów, których opis przy założonych analogiach jest tożsamy z badanym układem równań.

6.4. Założyć, że znane są związki matematyczne między prądami i napięciami określonymi względem zacisków wrót dwuwrotnika (np. czwórnika) (rys. 6.4a). Mają one postać układu dwóch równań algebraicznych o współczynnikach będących w przypadku ogólnym liczbami zespolonymi lub wyrażę-

niami operatorowymi. Wyznaczyć model obwodowy zawierający źródła sterowane, którego opis matematyczny jest tożsamy ze znanym z założenia układem równań o postaci

$$U_1(s) = z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s)$$

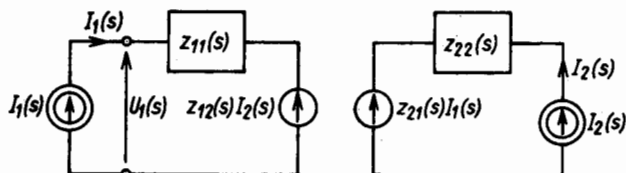
$$U_2(s) = z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s)$$



Rys. 6.4

ROZWIĄZANIE. Zakładając, że w obwodzie zastępczym wymuszeniami są napięcia $U_1(s)$ i $U_2(s)$, każde z równań można modelować obwodem szeregowym, składającym się ze źródła i elementu pasywnego o zastępczej impedancji równej odpowiednio $z_{11}(s)$ lub $z_{22}(s)$, oraz źródłem napięcia sterowanym prądem. Prąd sterujący źródłem napięcia, włączonym do obwodu modelującego pierwsze równanie, jest prądem płynącym w obwodzie modelującym drugie równanie i odwrotnie. Tak więc sprzężenie obu obwodów, wyrażające zależność między prądami i napięciami źródłowymi, jest realizowane przez źródła napięcia sterowane prądem. Na rysunku 6.4b są przedstawione schematy obwodów, które rozpatrywane łącznie modelują układ równań określony w zadaniu.

6.5. Dla układu równań określonego w poprzednim zadaniu wyznaczyć model obwodowy zakładając, że źródła niezależne wymuszają prądy $I_1(s)$ i $I_2(s)$.



Rys. 6.5

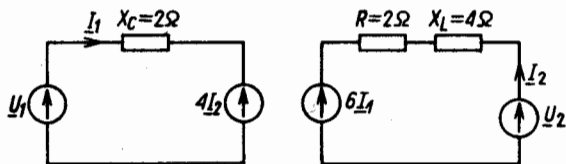
Odpowiedź. Schemat obwodu przedstawiono na rys. 6.5.

6.6. Dany jest układ równań określający związki między prądami i napięciami dwuwrotnika w postaci

$$\underline{U}_1 = -j2 \underline{I}_1 + 4 \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = 6 \underline{I}_1 + (2 + j4) \underline{I}_2$$

Wyznaczyć schemat obwodu aktywnego modelującego powyższy układ równań.



Rys. 6.6

Odpowiedź. Schemat obwodu opisanego równaniami określonymi w zadaniu jest przedstawiony na rys. 6.6.

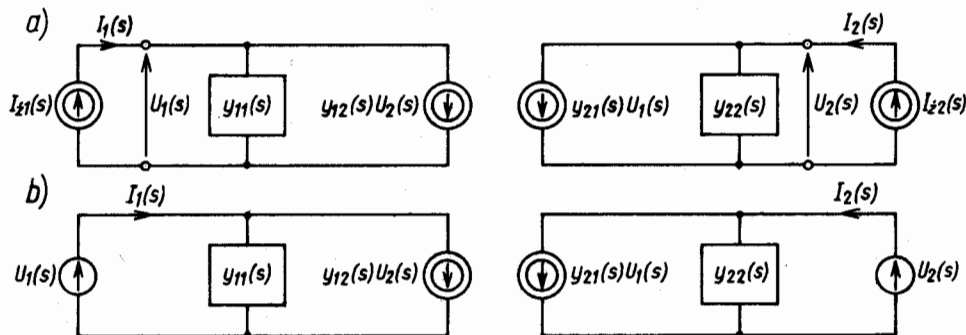
6.7. Wyznaczyć schemat obwodu aktywnego modelującego układ równań (równania admitancyjne czwórnika) o postaci

$$I_1(s) = y_{11}(s) U_1(s) + y_{12}(s) U_2(s)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) U_1(s) + y_{22}(s) U_2(s)$$

Rozpatrzyć dwa przypadki: a) znane są prądy $I_1(s) = I_{z1}(s)$ i $I_2(s) = I_{z2}(s)$, b) znane są napięcia $U_1(s)$ i $U_2(s)$.

ROZWIĄZANIE. Przedstawione równania z fizycznego punktu widzenia wyrażają bilanse prądów w dwóch węzłach obwodu elektrycznego. Można więc każdemu z nich przyporządkować układ składający się z równolegle połączonego elementu pasywnego, o admitancji zastępczej równej odpowiednio $y_{11}(s)$ i $y_{22}(s)$, oraz źródeł prądu sterowanych napięciem. Przyjęcie określonej pary sygnałów za znane determinuje wybór źródeł niezależnych zasilających obwody. Jeśli są to prądy, to źródłami zasilającymi oba obwody będą idealne źródła prądu; jeśli są to napięcia, to źródłami zasilającymi będą idealne źródła napięcia. Uwzględniając powyższe rozważania, otrzymamy obwody elektryczne o strukturze jak na rys. 6.7a i b.



Rys. 6.7

6.8. Określić strukturę obwodu modelującego układ równań o postaci

$$I_{z1}(s) = (0,2 + s) U_1(s) + 4 U_2(s)$$

$$I_{z2}(s) = -2 U_1(s) + \frac{4}{s} U_2(s)$$

przystosowaną do wyznaczenia ustalonych wartości chwilowych napięć $u_1(t)$ i $u_2(t)$ przy założeniu, że prądy źródłowe są odpowiednio równe

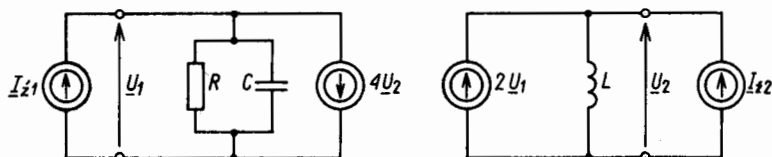
$$i_{z1}(t) = 14,1 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right); \quad i_{z2}(t) = 14,1 \sin 10t$$

ROZWIĄZANIE. Analizujemy stan ustalony w przypadku, gdy w obwodzie elektrycznym liniowym wymuszeniami są sygnały sinusoidalnie zmienne w funkcji czasu. Przejścia od postaci operatorowej równań do postaci zespolonej dokonujemy przez podstawienie $s = j\omega$. Otrzymamy układ równań

$$\underline{I}_{z1} = (0,2 + j\omega) \underline{U}_1 + 4 \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_{z2} = -2 \underline{U}_1 + \frac{4}{j\omega} \underline{U}_2$$

w którym zespolone wartości skuteczne prądów źródłowych: $\underline{I}_{z1} = j10$ A, $\underline{I}_{z2} = 10$ A. Współczynnik $y_{11}(j\omega)$ możemy modelować połączonymi równolegle: rezystorem o rezystancji $R = 1/0,2 = 5 \Omega$ i kondensatorem o pojemności $C = 1$ F. Współczynnik $y_{22}(j\omega)$ modelujemy cewką o indukcyjności $L = 1/4 = 0,25$ H. Otrzymujemy układ o strukturze połączeń elementów pokazanych na rys. 6.8. Zasilając ten obwód ze źródeł generujących zadane sygnały zmienne



Rys. 6.8

w funkcji czasu, można go analizować np. przy wykorzystaniu programu komputerowego bezpośrednio w dziedzinie czasu, gdyż jego struktura nie zależy od kształtu sygnałów wymuszających.

6.9. Określić strukturę obwodu modelującego równania o postaci

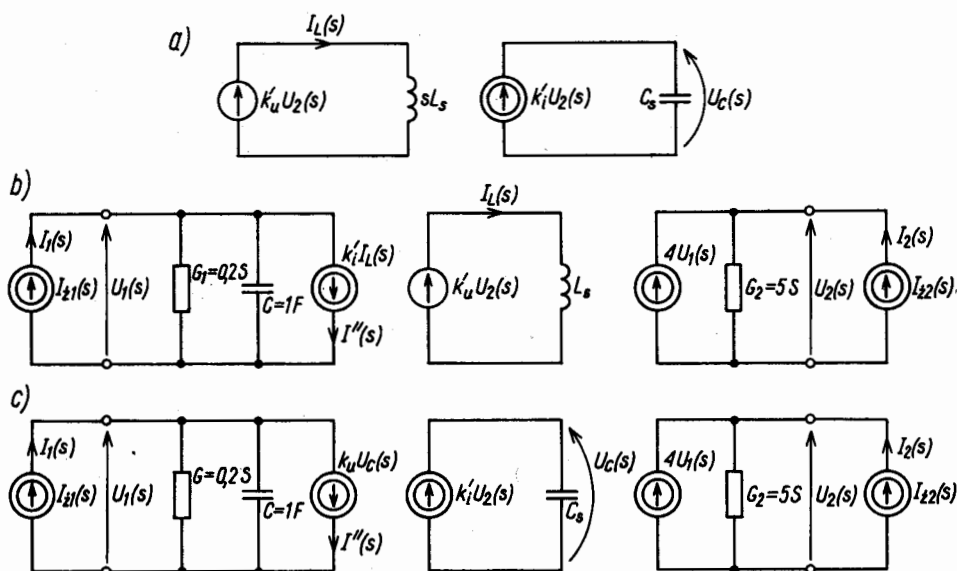
$$I_1(s) = (0,2 + s) U_1(s) + \frac{1}{s} U_2(s)$$

$$I_2(s) = -4 U_1(s) + 5 U_2(s)$$

w których znanymi sygnałami są prądy $I_1(s) = I_{z1}(s)$ i $I_2(s) = I_{z2}(s)$.

ROZWIĄZANIE. Przy obliczeniach komputerowych wykorzystujących niektóre wersje programu NAP lub SPICE problemem może być modelowanie źródeł sterowanych pochodną lub całką sygnału sterującego. W takich przypadkach konieczne jest wprowadzenie ogniwa pośredniego, w którym w sposób naturalny dokonuje się całkowanie lub różniczkowanie określonego sygnału. Elementami, które umożliwiają wykonanie tych operacji są cewki i kondensatory. W rozpatrywanym układzie, w pierwszym równaniu współczynnikiem przy napięciu $U_2(s)$ sterującym źródłem prądu jest wyrażenie $1/sC$ (z danych wynika, że $C = 1$ F), które oznacza, że w funkcji czasu prąd źródłowy generowany przez to źródło jest proporcjonalny do całki tego napięcia

$$i''(t) = \frac{1}{C} \int u_2(t) dt$$



Rys. 6.9

Ukształtowanie sygnału proporcjonalnego do całki napięcia $u_2(t)$ można otrzymać zasilając cewkę lub kondensator odpowiednio ze źródła napięcia lub prądu, sterowanych napięciem $u_2(t)$. Jeśli w obwodach przedstawionych na rys. 6.9a wyznaczmy kolejno prąd płynący przez cewkę o indukcyjności L_s i napięcie na kondensatorze C_s , to otrzymamy

$$I_L(s) = \frac{k'_u U_2(s)}{s L_s}; \quad U_C(s) = \frac{k'_i U_2(s)}{s C_s}$$

Sygnały te w dziedzinie czasu są proporcjonalne do całki napięcia $u_2(t)$. Wprowadzenie ogniwa pośredniego w postaci jednego z obwodów z rys. 6.9a nie może zmienić prądu $I''(s)$ wypływającego ze źródła sterowanego. Zatem,

jeśli źródło to ma być sterowane sygnałem $I_L(s)$, musi być spełniony warunek

$$k_i I_L(s) = \frac{1}{sC} U_2(s) \quad \text{oraz} \quad \frac{k_i k'_u}{L_s} = \frac{1}{C}$$

W drugim przypadku, gdy sygnałem sterującym ma być napięcie $U_C(s)$ musi być spełniony warunek

$$k_u U_C(s) = \frac{1}{sC} U_2(s) \quad \text{oraz} \quad \frac{k_u k'_i}{C_s} = \frac{1}{C}$$

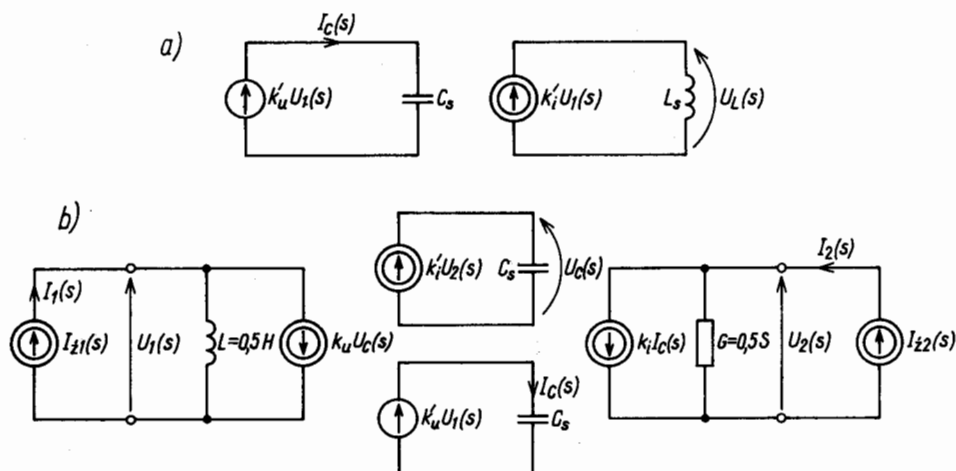
przy czym k'_i , k'_u , k_i oraz k_u są współczynnikami wzmocnienia o wartości dobieranej najczęściej arbitralnie i o wymiarze wynikającym z charakteru relacji między sygnałem wyjściowym a sygnałem sterującym. Układ modelujący równania określone w zadaniu ma strukturę przedstawioną na rys. 6.9b lub rys. 6.9c.

6.10. Określić strukturę obwodu modelującego równania o postaci

$$I_1(s) = \frac{2}{s} U_1(s) + \frac{4}{s} U_2(s)$$

$$I_2(s) = 4s U_1(s) + 5 U_2(s)$$

w których znanymi sygnałami są prądy $I_1(s) = I_{z1}(s)$ i $I_2(s) = I_{z2}(s)$.



Rys. 6.10

ROZWIĄZANIE. W przedstawionym wyżej układzie równań istnieje potrzeba ukształtowania zarówno sygnału proporcjonalnego do całki napięcia $u_2(t)$ (drugi człon w pierwszym równaniu), jak i sygnału proporcjonalnego do pochodnej napięcia $u_1(t)$ (pierwszy człon w drugim równaniu). Sposób kształ-

owania sygnału proporcjonalnego do całki napięcia został przedstawiony w zadaniu 6.9. Sygnał proporcjonalny do pochodnej napięcia może być ukształtowany w obwodach przedstawionych na rys. 6.10a. W obwodach tych sygnałami proporcjonalnymi do pochodnej napięcia $u_1(t)$ są

$$I_C(s) = s C_s k'_u U_1(s); \quad U_L(s) = s L_s k'_i U_1(s)$$

Możliwość sterowania źródła prądu modelującego wyrażenie $4s U_1(s)$ określonymi wyżej sygnałami jest dopuszczalna wówczas, gdy są spełnione następujące zależności:

$$k_i I_C(s) = 4s U_1(s) \quad \text{oraz} \quad k_i k'_u C_s = 4$$

$$k_u U_L(s) = 4s U_1(s) \quad \text{oraz} \quad k_u k'_i L_s = 4$$

Na rysunku 6.10b jest pokazany obwód modelujący układ równań z wykorzystaniem kondensatorów do ukształtowania sygnałów proporcjonalnych do całki napięcia u_2 i pochodnej napięcia u_1 .

6.11. Wyznaczyć strukturę obwodu aktywnego modelującego równania łańcuchowe czwórnika w postaci

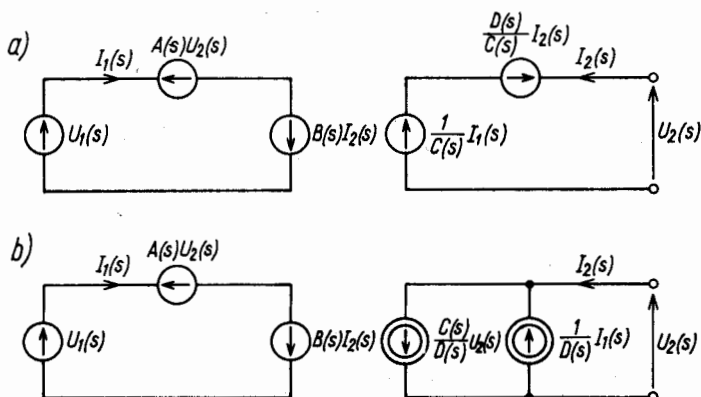
$$U_1(s) = A(s) U_2(s) - B(s) I_2(s)$$

$$I_1(s) = C(s) U_2(s) - D(s) I_2(s)$$

Przyjąć, że układ jest zasilany z idealnego źródła napięcia o napięciu $U_1(s)$.

ROZWIĄZANIE. Pierwsze z równań łańcuchowych modelujemy dwoma szeregowo połączonymi źródłami napięcia, sterowanymi odpowiednio napięciem $U_2(s)$ i prądem $I_2(s)$. Drugie zaś równanie może być modelowane w dwojaki sposób. Według pierwszego sposobu modelujemy równanie określające napięcie na zaciskach wyjściowych czwórnika, a więc równanie o postaci

$$U_2(s) = \frac{1}{C(s)} I_1(s) + \frac{D(s)}{C(s)} I_2(s)$$



Rys. 6.11

Równanie to modelujemy dwoma szeregowo połączonymi źródłami napięcia sterowanymi odpowiednio prądem $I_1(s)$ i prądem $I_2(s)$. Alternatywnym, drugim sposobem jest modelowanie równania określającego prąd $I_2(s)$, a więc równania

$$I_2(s) = \frac{C(s)}{D(s)} U_2(s) - \frac{1}{D(s)} I_1(s)$$

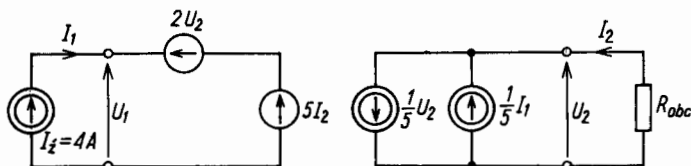
Równanie to modelujemy dwoma równolegle połączonymi źródłami prądu sterowanymi odpowiednio napięciem $U_2(s)$ i prądem $I_1(s)$. Na rysunku 6.11a i b są pokazane układy modelujące równania łańcuchowe. W pierwszym z układów po stronie wtórnej bilansowano napięcia, w drugim — prądy.

6.12. Wyznaczyć strukturę obwodu aktywnego modelującego równania łańcuchowe czwórnika w postaci

$$U_1 = 2U_2 + 5I_2$$

$$I_1 = U_2 - 5I_2$$

Przyjąć, że układ zasilany z idealnego źródła prądu stałego generującego prąd $I_z = 4\text{ A}$ jest obciążony rezystorem $R_{obc} = 5\ \Omega$, a następnie rezystorem $R_{obc} = 1\ \Omega$. Obliczyć rezystancję wejściową czwórnika przy obu obciążeniach.



Rys. 6.12

Odpowiedź. Schemat układu modelującego równania określone w zadaniu jest przedstawiony na rys. 6.12, natomiast rezystancja wejściowa jest równa odpowiednio: $R_{we1} = 0,5\ \Omega$ przy $R_{obc} = 5\ \Omega$ oraz $R_{we2} = -0,66\ \Omega$ przy $R_{obc} = 1\ \Omega$. Przy obciążeniu czwórnika rezystancją $R_{obc} = 1\ \Omega$ rezystancja wejściowa jest ujemna, co oznacza, że czwórnik jest konwerterem ujemnoimpedancyjnym.

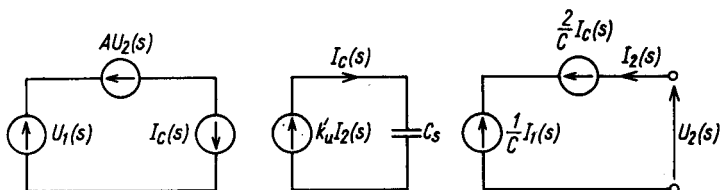
6.13. Wyznaczyć strukturę obwodu aktywnego modelującego równania łańcuchowe czwórnika w postaci

$$U_1(s) = A U_2(s) - s I_2(s)$$

$$I_1(s) = C U_2(s) + 2s I_2(s)$$

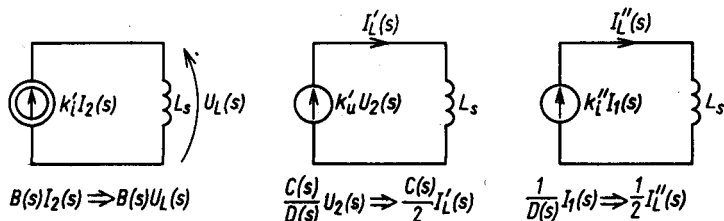
Przyjąć, że układ jest zasilany z idealnego źródła napięcia o napięciu źródłowym $U_1(s)$.

ROZWIĄZANIE. Postać operatorowa parametrów $B(s)$ i $D(s)$ wskazuje, że w modelu obwodowym wystąpią sygnały sterujące, które są pochodną lub całką prądu albo napięcia. Konieczne jest więc wprowadzenie układów umożliwiających wykonanie tych operacji matematycznych (patrz zadania 6.9 i 6.10). Korzystając dla rozpatrywanego układu równań z obwodu przedstawionego na rys. 6.11a stwierdzamy, iż w modelu obwodowym występują dwa źródła napięcia sterowane pochodną prądu i_2 . Sygnał proporcjonalny do pochodnej możemy otrzymać w układach rozpatrywanych w zadaniu 6.10 (rys. 6.10a). Jeśli wybierzemy układ z kondensatorem oraz dobierzemy parametry w taki sposób, by iloczyn $C_s k'_u = 1$, to otrzymamy $di_2/dt = di_C/dt$ oraz model obwodowy o strukturze pokazanej na rys. 6.13.



Rys. 6.13

6.14. Dla układu równań jak w zadaniu 6.13 określić parametry elementów obwodu o strukturze jak na rys. 6.11b. Do kształtowania sygnałów proporcjonalnych do pochodnej i całki wykorzystać układy zawierające cewki.



Rys. 6.14

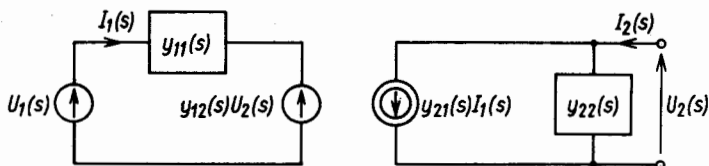
Odpowiedź. Układy kształtujące sygnały proporcjonalne do pochodnej i całki są przedstawione na rys. 6.14. Przyjęto, że $k'_i L_s = k'_u L_s = k''_i L_s$.

6.15. Wyznaczyć strukturę obwodu aktywnego modelującego równania hybrydowe czwórnika w postaci

$$U_1(s) = y_{11}(s) I_1(s) + y_{12}(s) U_2(s)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) I_1(s) + y_{22}(s) U_2(s)$$

Przyjąć, że układ jest zasilany z idealnego źródła napięcia $U_1(s)$.



Rys. 6.15

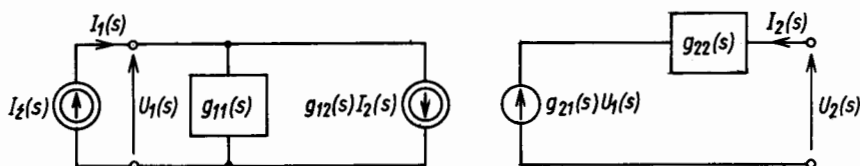
Odpowiedź. Struktura obwodu jest przedstawiona na rys. 6.15.

6.16. Wyznaczyć strukturę obwodu aktywnego modelującego równania hybrydowe czwórnika w postaci

$$I_1(s) = g_{11}(s) U_1(s) + g_{12}(s) I_2(s)$$

$$U_2(s) = g_{21}(s) U_1(s) + g_{22}(s) I_2(s)$$

Przyjąć, że układ jest zasilany z idealnego źródła prądu $I_1(s) = I_z(s)$.



Rys. 6.16

Odpowiedź. Struktura obwodu jest przedstawiona na rys. 6.16.

6.17. Wyznaczyć schemat obwodu aktywnego modelującego układ równań (równania admitancyjne n -biegunnika) o postaci

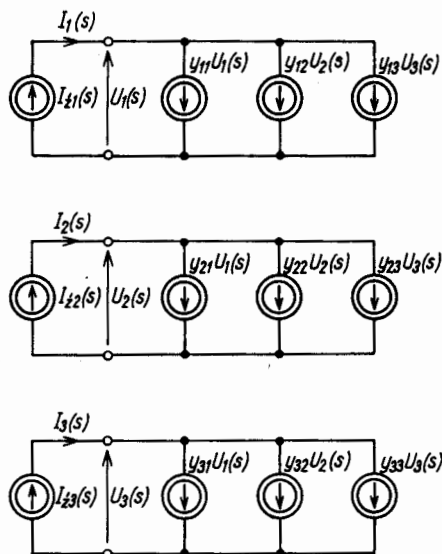
$$I_1(s) = y_{11} U_1(s) + y_{12} U_2(s) + y_{13} U_3(s)$$

$$I_2(s) = y_{21} U_1(s) + y_{22} U_2(s) + y_{23} U_3(s)$$

$$I_3(s) = y_{31} U_1(s) + y_{32} U_2(s) + y_{33} U_3(s)$$

Przyjąć, że są znane prądy: $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$ równe odpowiednio: $I_1(s) = I_{z1}(s)$; $I_2(s) = I_{z2}(s)$; $I_3(s) = I_{z3}(s)$.

ROZWIĄZANIE. Każde z równań można modelować równoległym połączeniem trzech źródeł prądu sterowanych odpowiednio napięciami: $U_1(s)$, $U_2(s)$, $U_3(s)$. Układem modelującym podany układ równań będzie więc obwód o strukturze przedstawionej na rys. 6.17.



Rys. 6.17

6.18. Wyznaczyć schemat obwodu aktywnego modelującego układ równań algebraicznych o postaci

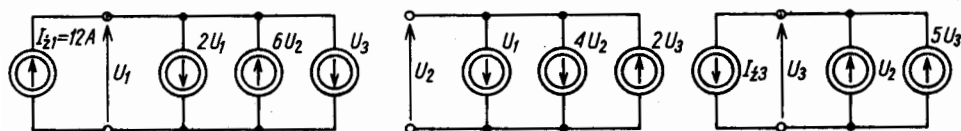
$$y_1 = 2x_1 - 6x_2 + x_3$$

$$0 = x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

$$y_3 = x_2 + 5x_3$$

Przyjąć, że są znane wielkości: $y_1 = 12$ i $y_3 = -12$.

ROZWIĄZANIE. W celu wyznaczenia obwodu elektrycznego, którego analiza umożliwiłaby obliczenie niewiadomych x_1 , x_2 i x_3 konieczne jest przyporządkowanie wielkościom y_1 i y_2 oraz niewiadomym x_1 , x_2 i x_3 sygnałów elektrycznych do nich proporcjonalnych. Zazwyczaj z fizycznego punktu widzenia jest możliwe ustalenie kilku zbiorów sygnałów elektrycznych, które mogą być analogami wielkości występujących w równaniach algebraicznych. W rozpatrywanym przypadku korzystnie jest przyjąć, że poszczególne równania są równoważne bilansom prądów w węzłach trójbiegunnika. Można więc założyć, że wielkościom y_1 i y_2 odpowiadają prądy źródłowe $I_{z1} = 12$ A i $I_{z2} = -12$ A, niewiadomym zaś x_1 , x_2 i x_3 — napięcia (potencjały) węzłowe U_1 , U_2 i U_3 . Uwzględniając powyższe założenia, obwód aktywny modelujący określony w zadaniu układ ma strukturę pokazaną na rys. 6.18.



Rys. 6.18

6.19. Wyznaczyć schemat obwodu aktywnego modelującego układ równań (równania impedancyjne n -bramnika) o postaci

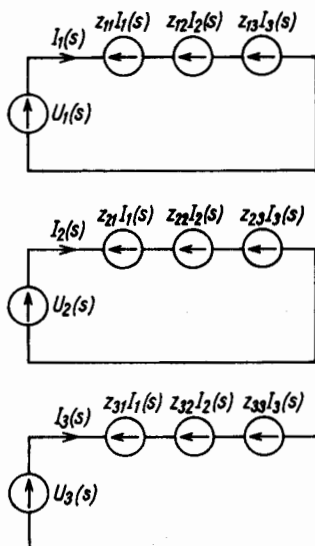
$$U_1(s) = z_{11} I_1(s) + z_{12} I_2(s) + z_{13} I_3(s)$$

$$U_2(s) = z_{21} I_1(s) + z_{22} I_2(s) + z_{23} I_3(s)$$

$$U_3(s) = z_{31} I_1(s) + z_{32} I_2(s) + z_{33} I_3(s)$$

Przyjąć, że są znane napięcia źródłowe: $U_1(s)$, $U_2(s)$, $U_3(s)$.

ROZWIĄZANIE. Każde z równań określa bilans napięć w oczku obwodu. Elementem każdego oczka tego obwodu jest brama, na zaciskach której określono zastępcze napięcie źródłowe i prąd źródła z niego wypływający. Abstrahując od rzeczywistej struktury obwodu opisanej powyższym układem równań, można każde z nich modelować układem zawierającym niezależne źródło napięcia, połączone szeregowo z trzema źródłami napięcia sterowanymi prądem. W konsekwencji otrzymujemy obwód aktywny o strukturze pokazanej na rys. 6.19.



Rys. 6.19

6.20. Wyznaczyć schemat obwodu aktywnego modelującego układ równań o postaci

$$U_1(s) = 2I_1(s) + 3I_2(s) + 4I_3(s)$$

$$0 = 5I_1(s) + 3I_2(s) - I_3(s)$$

$$0 = -4I_2(s) + 2I_3(s)$$

Przyjąć, że jest znane napięcie źródłowe $U_1(s) = E/s$.

Odpowiedź. Obwód ma strukturę analogiczną do pokazanej na rys. 6.19, przy czym $z_{11} = 2$, $z_{12} = 3$, $z_{13} = 4$, $z_{21} = 5$, $z_{22} = 3$, $z_{23} = -1$, $z_{31} = 0$, $z_{32} = -4$, $z_{33} = 2$ oraz $U_2(s) = 0$ i $U_3(s) = 0$.

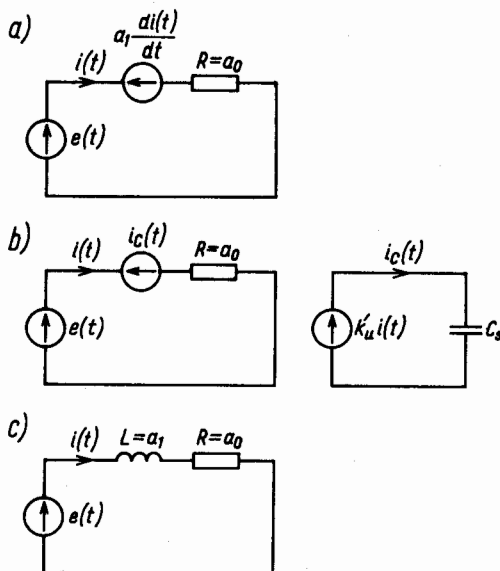
6.2. Modelowanie równań różniczkowych zwyczajnych strukturami obwodowymi

6.21. Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne o postaci

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = y$$

Określić strukturę obwodu aktywnego modelującego to równanie.

ROZWIĄZANIE. Do określenia struktury obwodu elektrycznego — w którym związek pomiędzy sygnałami jest podobny do istniejącego w rozpatrywanym równaniu — należy ustalić analogie między wielkościami z lewej i prawej strony równania a odpowiednimi sygnałami elektrycznymi. Zazwyczaj istnieje możliwość wyboru kilku zestawów sygnałów będących analogami. W rozpatrywanym przypadku można przyjąć np., że niewiadoma x jest proporcjonalna do prądu [$x = i(t)$]. Zatem, z fizycznego punktu widzenia należy założyć, że wielkość y jest proporcjonalna do napięcia źródłowego [$y = e(t)$]. Oznacza to, że człony z lewej strony równania można modelować sterowanymi źródłami napięcia. Otrzymamy więc układ o strukturze pokazanej na rys. 6.20a, w którym jedno ze źródeł jest sterowane pochodną prądu.



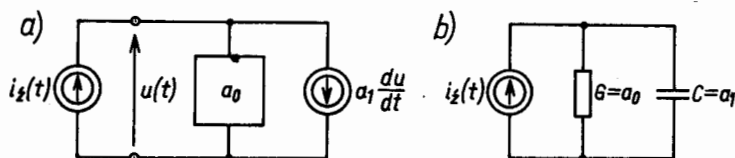
Rys. 6.20

Jeśli w programie symulacji komputerowej nie jest możliwe różniczkowanie sygnału sterującego, należy do tego celu — podobnie jak czyniono to w zadaniu 6.10 — wykorzystać kondensator lub cewkę. Zasilając np. kondensator ze źródła napięcia sterowanego prądem $i(t)$ stwierdzamy, że prąd płynący przez kondensator

$$i_c(t) = k'_u C_s \frac{di(t)}{dt} \quad \text{stąd} \quad k'_u C_s \frac{di(t)}{dt} = a_1 \frac{di(t)}{dt} \quad \text{oraz} \quad k'_u C_s = a_1$$

W konsekwencji otrzymujemy obwód o strukturze pokazanej na rys. 6.20b. W przypadku tak prostego równania różniczkowego nie jest problemem znalezienie obwodu pasywnego opisywanego równaniem o analogicznej postaci matematycznej. Przy założonych analogiach między sygnałami jest to obwód przedstawiony na rys. 6.20c.

6.22. Korzystając z rozważań podanych w rozwiązaniu zadania 6.21, wyznaczyć strukturę obwodu aktywnego i pasywnego modelującego równanie przedstawione w tym zadaniu. Przyjąć, że analogiem zmiennej x jest napięcie, znanej zaś wielkości y — prąd $i_z(t)$.



Rys. 6.21

Odpowiedź. Struktury obwodów aktywnego i pasywnego są przedstawione na rys. 6.21a i b.

6.23. Określić strukturę obwodu modelującego równanie różniczkowe o postaci

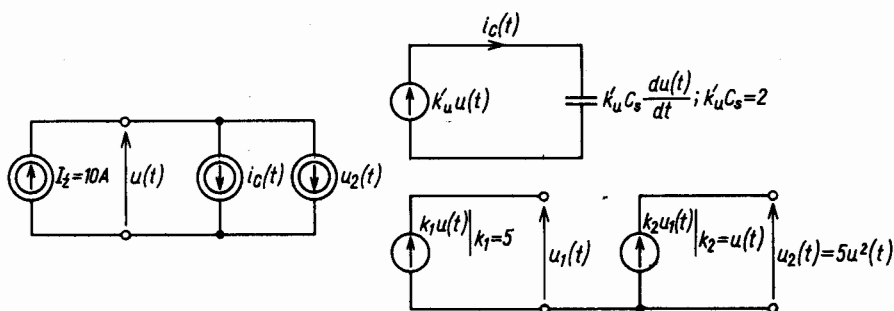
$$2 \frac{dx}{dt} + 5x^2 = 10$$

Przyjąć, że analogiem zmiennej x jest napięcie na zaciskach źródła, którego prąd źródłowy jest analogiem wielkości występującej po prawej stronie równania. A zatem $I_z = 10$ A.

ROZWIĄZANIE. Równanie określone w zadaniu jest równaniem różniczkowym nieliniowym. Przy poszukiwaniu obwodu pasywnego opisanego równaniem o analogicznej postaci musimy korzystać z elementów nieliniowych. Jeśli natomiast poszukujemy obwodu aktywnego zawierającego źródła sterowane, w których współczynnik wzmocnienia k może być uzależniony funkcjonalnie od określonego prądu lub napięcia występującego na elemencie pasywnym obwodu, to wyrażenie $5x^2 = 5u^2(t)$ możemy modelować kaskadą

dwóch źródeł napięcia. W pierwszym źródle sygnałem sterującym jest napięcie $u(t)$, a współczynnik wzmocnienia $k_1 = 5$. Napięcie na zaciskach tego źródła $u_1(t) = 5u(t)$. Drugie źródło jest sterowane napięciem $u_1(t)$, natomiast współczynnik wzmocnienia $k_2 = u(t)$. Wobec tego, napięcie na zaciskach drugiego źródła sterowanego $u_2(t) = k_2 u_1(t) = 5u^2(t)$.

Należy podkreślić, że współczesne programy komputerowe analizy obwodów elektrycznych typu NAP lub SPICE dopuszczają uzmiennianie współczynników wzmocnienia we wszystkich czterech typach źródeł sterowanych. Metody modelowania obwodowego — prezentowane w p. 6.1 i 6.2 — są wstępnym etapem do obliczeń komputerowych prowadzonych z wykorzystaniem ww. programów. Zatem w dalszej części niniejszego rozdziału będziemy korzystać z możliwości uzmienniania współczynników wzmocnienia w źródłach sterowanych. Na rysunku 6.22 jest pokazany obwód aktywny modelujący równanie różniczkowe podane w treści zadania.

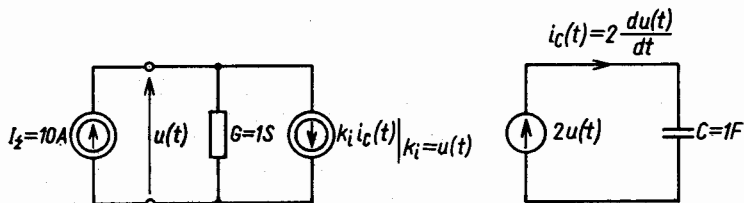


Rys. 6.22

6.24. Określić strukturę obwodu modelującego równanie różniczkowe o postaci

$$2x \frac{dx}{dt} + x = 10$$

Przyjąć, że analogiem zmiennej x jest napięcie na zaciskach źródła, którego prąd źródłowy jest analogiem wielkości występującej po prawej stronie równania; a zatem $I_z = 10$ A.



Rys. 6.23

Odpowiedź. Struktura obwodu jest przedstawiona na rys. 6.23.

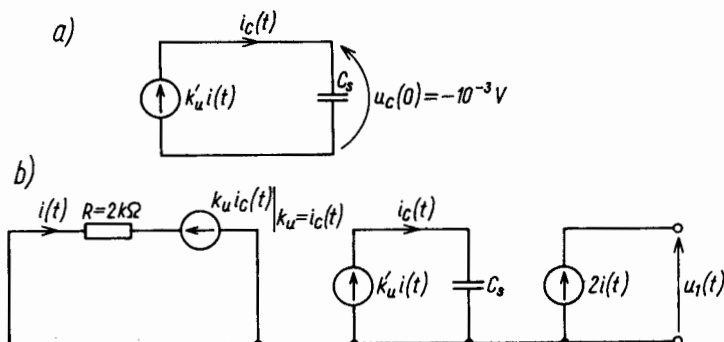
6.25. Określić strukturę obwodu modelującego równanie różniczkowe jednorodne o postaci

$$2x \frac{dx}{dt} + 2 \cdot 10^3 x = 0$$

Przyjąć, że analogiem zmiennej x jest prąd płynący przez rezystor. Napięcie na jego zaciskach jest sygnałem równym drugiemu członowi powyższego równania.

ROZWIĄZANIE. Niezerowe rozwiązanie równania różniczkowego jest możliwe jedynie w przypadku, gdy dla chwili $t = 0$ wartość $x(t = 0) \neq 0$. Przyjmując np. $x(0) = i(0) = i_0 = 1$ A, stwierdzamy, że

$$\frac{dx(0)}{dt} = \frac{di(0)}{dt} = -10^3$$



Rys. 6.24

Jeśli więc sygnał proporcjonalny do pochodnej prądu kształtujemy w układzie pokazanym na rys. 6.24a, to musimy zadać wartość początkową napięcia na kondensatorze równą wartości $k'_u i(0)$. Zatem powinny być spełnione relacje

$$u_c(0) = k'_u i(0) \quad \text{oraz} \quad i_c(t) = k'_u C_s \frac{di(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt}, \quad \text{stąd} \quad k'_u C_s = 1$$

Sygnał proporcjonalny do iloczynu $2x \frac{dx}{dt} = 2i \frac{di(t)}{dt}$ ukształtujemy stosując źródło napięcia sterowane sygnałem $2i(t)$ (współczynnik wzmocnienia $k = 2$, sygnałem sterującym jest prąd $i(t)$) oraz źródło napięcia, w którym współczynnik wzmocnienia $k = i_c(t)$, a sygnałem sterującym jest napięcie $u_1(t)$ proporcjonalne do sygnału $2i(t)$. Uwzględniając opisane wyżej realizacje, model obwodowy analizowanego równania ma postać pokazaną na rys. 6.24b.

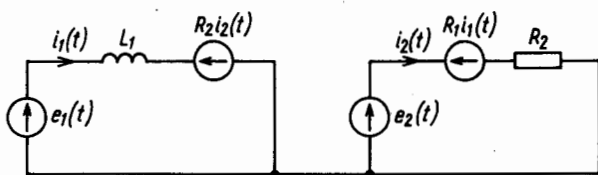
6.26. Określić strukturę obwodu modelującego układ równań o postaci

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_2 i_2(t) = e_1(t)$$

$$R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = e_2(t)$$

Przyjąć, że są znane napięcia źródłowe $e_1(t)$ oraz $e_2(t)$.

ROZWIĄZANIE. Układ równań określony w zadaniu nazywamy *układem singularnym*. Technika modelowania obwodowego takich układów nie różni się od prezentowanej we wcześniejszych zadaniach. Podane równania, określające bilans napięć w oczku obwodu elektrycznego, możemy modelować dwoma obwodami, z których każdy jest zasilany odpowiednio ze źródła $e_1(t)$ oraz $e_2(t)$. Struktura tych obwodów jest przedstawiona na rys. 6.25.



Rys. 6.25

6.27. Układowi równań określonych w zadaniu 6.26 przyporządkować obwód nie zawierający źródeł sterowanych.

Odpowiedź. Nie istnieje obwód nie zawierający źródeł sterowanych modelujący podane równania.

6.28. Dane jest równanie stanu o postaci

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

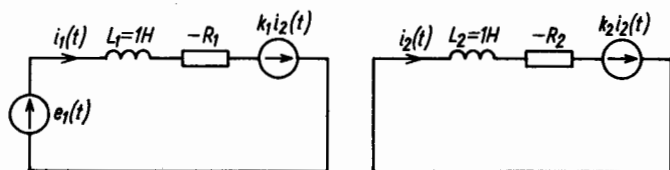
Określić strukturę obwodu aktywnego, którego opis jest analogiczny do podanego wyżej równania. Przyjąć, że sygnałom x_1 i x_2 odpowiadają prądy $i_1(t)$ oraz $i_2(t)$, znanej zaś z założenia wielkości y_1 odpowiada napięcie źródłowe $e_1(t)$.

ROZWIĄZANIE. Przy przyjętych założeniach analogami współczynników macierzy przekształceń są rezystory lub współczynniki wzmocnienia źródeł napięcia sterowanych prądami. Uwzględniając zachodzące analogie między sygnałami, równanie stanu możemy przekształcić do postaci

$$\frac{di_1(t)}{dt} - R_1 i_1(t) - k_1 i_2(t) = e_1(t)$$

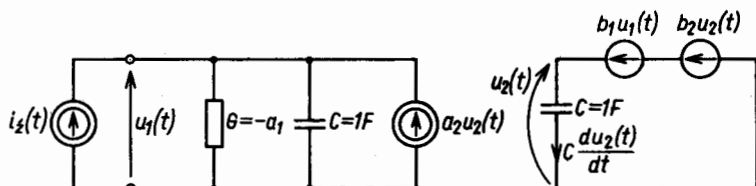
$$\frac{di_2(t)}{dt} - k_2 i_1(t) - R_2 i_2(t) = 0$$

Równaniom tym przyporządkowujemy obwody elektryczne o strukturze pokazanej na rys. 6.26.



Rys. 6.26

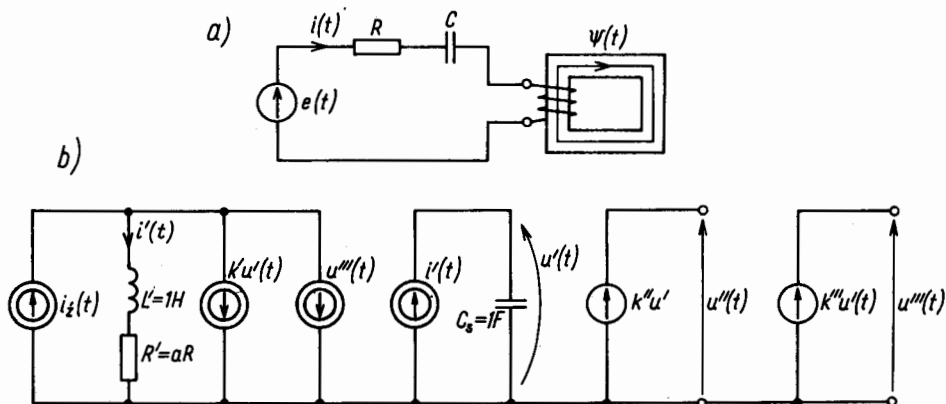
6.29. Zakładając, że sygnał i niektórym wielkościom w równaniu stanu sformułowanym w zadaniu 6.28 przyporządkowujemy następujące analogie: $x_1 \Rightarrow u_1(t)$, $x_2 \Rightarrow u_2(t)$, $y_1 \Rightarrow i_z(t)$ (prąd źródłowy), określić strukturę obwodu aktywnego będącego modelem obwodowym tego równania.



Rys. 6.27

Odpowiedź. Struktura obwodu jest przedstawiona na rys. 6.27.

6.30. Równanie Duffinga jest stosowane m.in. do opisu zmienności strumienia skojarzonego z cewką nawiniętą na rdzeniu ferromagnetycznym, stanowiącą element obwodu ferrezonansowego — szeregowego lub równoległego — (rys. 6.28a). Zakłada się przy tym, że zależność między prądem



Rys. 6.28

plynącym przez cewkę $i(t)$ — proporcjonalnym do natężenia pola magnetycznego — a strumieniem skojarzonym z cewką $\psi(t)$ — proporcjonalnym do indukcji magnetycznej — jest wyrażana przez charakterystykę magnesowania pierwotnego. Krzywą tę aproksymuje się wielomianem nieparzystym, najczęściej trzeciego stopnia, o postaci

$$i(t) = a\psi(t) + b\psi^3(t)$$

Zakładamy, że współczynnik przy pierwszej pochodnej strumienia uprościmy podstawiając $3Rb\psi^2(t) \approx 0$. Wówczas obwód z rys. 6.28a możemy opisać równaniem Duffinga o postaci

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + aR\frac{d\psi(t)}{dt} + \frac{a}{C}\psi(t) + \frac{b}{C}\psi^3(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

Określić strukturę obwodu aktywnego modelującego to równanie.

ROZWIĄZANIE. Przy modelowaniu obwodowym równań różniczkowych drugiego rzędu korzystnie jest przekształcić je do układu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu. Przekształcenia dokonujemy wprowadzając nową zmienną, definiowaną zależnością

$$\psi_1(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

Jeśli zależność tę podstawimy do równania Duffinga, to przekształcimy je do układu równań

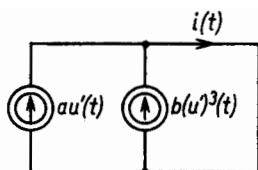
$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} + aR\psi_1(t) + \frac{a}{C}\psi(t) + \frac{b}{C}\psi^3(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \psi_1(t)$$

Przyjmując analogie: $\psi(t) \Rightarrow u'(t)$, $\psi_1(t) \Rightarrow i'(t)$ oraz zakładając, że $\frac{de(t)}{dt} \Rightarrow i_z(t)$, gdzie $i_z(t)$ jest znanym z założenia prądem źródłowym, obwód modelujący powyższy układ równań ma strukturę pokazaną na rys. 6.28b, przy czym współczynniki wzmacnienia źródeł sterowanych są odpowiednio równe: $k' = a/C$; $k'' = b/C$; $k''' = u''$.

6.31. Uzupełnić strukturę obwodu modelującego równanie Duffinga (rys. 6.28b) o człony umożliwiające wyznaczenie prądu $i(t)$ w obwodzie pokazanym na rys. 6.28a.

Odpowiedź. Obwód aktywny modelujący zmienność prądu $i(t)$ jest przedstawiony na rys. 6.29.



Rys. 6.29

6.32. Określić strukturę obwodu aktywnego modelującego jednorodne równanie van der Pola o postaci

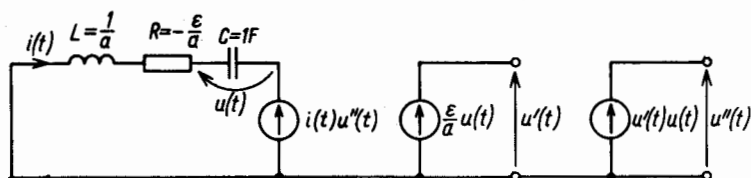
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + ax = 0$$

ROZWIĄZANIE. Postępując podobnie jak w przypadku równania Duffinga, przekształcimy równanie van der Pola do układu dwóch równań podstawiając: $\frac{dx}{dt} = i(t)$; $x = u(t)$. Po uporządkowaniu otrzymamy

$$\frac{di(t)}{dt} + \varepsilon u^2(t)i(t) - \varepsilon i(t) + au(t) = 0$$

$$\frac{du(t)}{dt} = i(t)$$

Jeśli pierwsze równanie podzielimy przez a , to możemy je modelować obwodem szeregowym o strukturze pokazanej na rys. 6.30, w którym napięcie $u(t)$ jest równe napięciu na kondensatorze. Obwód ten uzupełniono źródłami sterowanymi, które realizują iloczyn $\frac{\varepsilon}{a}u^2(t)$.



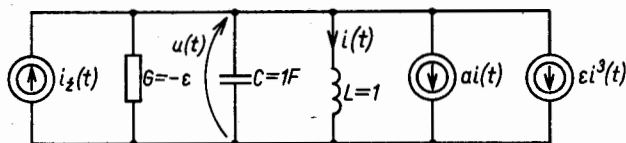
Rys. 6.30

6.33. Określić strukturę obwodu aktywnego modelującego niejednorodne równanie van der Pola o postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + ax = f(t)$$

Przyjąć następujące analogie: $f(t) \Rightarrow i_z(t)$ — prąd źródłowy, $x = i(t)$, $\frac{dx}{dt} = u(t)$.

Odpowiedź. Obwód modelujący powyższe równanie przy przyjętych analogiach jest przedstawiony na rys. 6.31.



Rys. 6.31

6.34. Dana jest transmitancja napięciowa układu

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + 4}{s^2 + 4s + 9}$$

Określić równanie różniczkowe i równania stanu opisujące badany układ oraz zaproponować model obwodowy umożliwiający symulację jego właściwości statycznych i dynamicznych. Przyjąć, że wymuszeniem jest napięcie $u_1(t) = E + U_m \sin \omega t$.

ROZWIĄZANIE. Z wyrażenia określającego transmitancję wyznaczamy równanie

$$s^2 U_2(s) + 4s U_2(s) + 9 U_2(s) = s^2 U_1(s) + 4 U_1(s)$$

Równanie to przekształcamy w równanie różniczkowe wykorzystując fakt, że operatorowi s^n odpowiada w dziedzinie czasu operator d^n/dt^n (przy założeniu, że transmitancję wyznaczono przy zerowych warunkach początkowych). Uwzględniając powyższe, otrzymamy równanie różniczkowe o postaci

$$\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + 4 \frac{du_2(t)}{dt} + 9 u_2(t) = \frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} + 4 u_1(t)$$

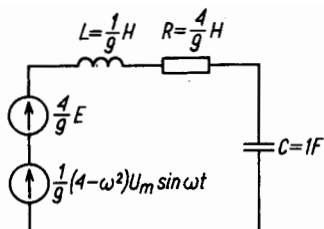
Równania stanu określimy zakładając, np.

$$\frac{du_2(t)}{dt} = u_3(t) \quad \text{oraz} \quad \text{podstawiając} \quad \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = \frac{du_3(t)}{dt}$$

Stąd po uporządkowaniu otrzymujemy równanie stanu o postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{du_2(t)}{dt} \\ \frac{du_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (4 - \omega^2) U_m \sin \omega t + 4E \end{bmatrix}$$

Model obwodowy odpowiadający powyższemu układowi równań stanu jest przedstawiony na rys. 6.32, przy czym przyjęto, że analogiem sygnału $u_3(t)$ jest



Rys. 6.32

prąd $i(t)$, natomiast analogiem sygnału $u_2(t)$ — napięcie na kondensatorze. Wymuszeniem jest napięcie źródłowe $e(t) = \frac{1}{9} [(4 - \omega^2) U_m \sin \omega t + 4E]$.

6.3. Symulacja komputerowa obwodów elektrycznych

6.3.1. Podstawowe informacje o programie NAP

6.3.1.1. Struktura programu w NAP

Program NAP jest przeznaczony do komputerowej symulacji statycznych i dynamicznych stanów pracy liniowych i nieliniowych obwodów elektrycznych.

W celu wykonania analizy obwodu z zastosowaniem programu symulacyjnego NAP tworzy się program z wykorzystaniem edytora binarnego, np. BRIEF, zawierającego zespół rozkazów, opis struktury obwodu oraz definicje funkcji stosowanych w przypadku istnienia uzależnień funkcjonalnych pomiędzy elementami i sygnałami lub przy opisie sygnałów generowanych przez niezależne źródła prądu i napięcia. Rozpoczęcie edycji programu w BRIEF wymaga nadania mu nazwy zawierającej ciąg dowolnych znaków alfanumerycznych oraz wypisanie zdania inicjującego proces edycji w postaci:

b [nazwa programu] $\Leftarrow$ Enter

Po wczytaniu tego zdania na ekranie monitora pojawia się rozjaśnione niebieskim tłem okno. Można więc rozpocząć pisanie programu. Jego struktura ma postać:

*circuit — opcjonalny, pierwszy rozkaz NAP;

:[tekst komentarza, opisu, informacji itp.] — może pojawić się wiele razy i w dowolnym miejscu programu;

[nazwa i definicja funkcji akceptowanych przez NAP] — patrz p. 6.3.1.3;

*lib[n] [nazwa elementu znajdującego się w n-tej bibliotece] — rozkaz wywołujący opis elementu zawartego w n-tej bibliotece NAP;



blok zawierający opis obwodu (patrz p. 6.3.1.2 i 6.3.1.3). W opisie struktury obwodu jest dopuszczalna dowolna kolejność oznaczania węzłów, przy czym jest konieczne, by jeden z węzłów był oznaczony przez zero (0), pozostałe zaś miały numery od 1 do 999;

*time [wartość początkowa czasu] [wartość końcowa czasu] [ewentualny przyrost czasu] — rozkaz opcjonalny, występujący przy analizie w dziedzinie czasu;

*time [nazwa elementu] [początkowa wartość parametru elementu] [końcowa wartość parametru elementu] [przyrost wartości parametru] — rozkaz opcjonalny przy analizie stałoprądowej obwodu w funkcji parametru jednego z wybranych elementów obwodu, którego nazwa została podana po rozkazie *time;

.time = [wartość] — wartość chwili czasu, dla której ustala się wartości sygnałów źródłowych przy analizie stałoprądowej;

*freq [początkowa wartość częstotliwości] [końcowa wartość częstotliwości] [założony przyrost częstotliwości] — rozkaz opcjonalny przy analizie częstotliwościowej obwodu liniowego zasilanego sygnałami zespolonymi;

.freq = [wartość częstotliwości] — wartość częstotliwości, przy której wykonuje się analizę obwodu zasilanego sygnałami zespolonymi;

*freq [nazwa elementu] [początkowa wartość parametru elementu] [końcowa wartość parametru] [przyrost parametru] — rozkaz opcjonalny przy analizie obwodu liniowego zasilanego sygnałami zespolonymi (o częstotliwości określonej w zdaniu: .freq = [wartość]) w funkcji wartości parametru wyszczególnionego elementu;

*dc — rozkaz opcjonalny przy analizie stałoprądowej;

*tr — rozkaz opcjonalny przy analizie obwodów liniowych i nieliniowych w dziedzinie czasu;

*dc*tr — rozkaz opcjonalny przy analizie w dziedzinie czasu z automatycznym obliczaniem warunków początkowych;

*ac — rozkaz opcjonalny przy analizie obwodu liniowego zasilanego sygnałami zespolonymi;

[rozkaz rodzaju analizy]*print [$\sqrt{}$ [nazwa elementu] v[numer węzła] w[nazwa elementu]] — żądanie wydruku wartości prądu płynącego przez element pasywny lub aktywny, którego nazwa jest poprzedzona literą i; żądanie wydruku wartości napięcia na elemencie pasywnym lub aktywnym, którego nazwę poprzedza litera v; żądanie wydruku wartości potencjału węzła,

którego numer jest poprzedzony literą v, żądanie wydruku mocy absorbowanej przez element o wskazanej nazwie poprzedzonej literami pw;

[rozkaz rodzaju analizy]*print *ma[* $\overset{ph}{\underset{rad}{r}}$] [$\overset{i}{\underset{v}{v}}$ [nazwa elementu] v[numer węzła] pw[nazwa elementu]] — żądanie wydruku wartości modułu i argumentu (*ph — w stopniach, *rad — w radianach) wskazanego prądu, napięcia lub potencjału wskazanego węzła oraz żądanie wydruku mocy absorbowanej przez wskazany element;

[rozkaz rodzaju analizy]*print *re*im [$\overset{i}{\underset{v}{v}}$ [nazwa elementu] v[numer węzła] pw[nazwa elementu]] — żądanie wydruku wartości zespolonej wskazanego prądu, napięcia, potencjału węzła i mocy absorbowanej w postaci algebraicznej;

[rozkaz rodzaju analizy]*probe [$\overset{i}{\underset{v}{v}}$ [nazwa elementu] v[numer węzła] pw[nazwa elementu]] — tworzenie zbioru wskazanych wartości prądów, napięć, potencjałów węzłów i mocy w programie probe, dzięki któremu można w sposób graficzny przedstawić wyniki każdej analizy;

[rozkaz rodzaju analizy]*probe*ma[* $\overset{ph}{\underset{rad}{r}}$] [$\overset{i}{\underset{v}{v}}$ [nazwa elementu] lub v[numer węzła] pw[nazwa elementu]] — tworzenie zbioru wartości modułu i argumentu (*ph — w stopniach, *rad — w radianach) wskazanego prądu, napięcia, potencjału węzła i mocy w programie graficznym probe;

[rozkaz rodzaju analizy]*probe*re*im [$\overset{i}{\underset{v}{v}}$ [nazwa elementu] v[numer węzła] pw[nazwa elementu]] — tworzenie zbioru wartości zespolonych (w postaci algebraicznej) wskazanego prądu, napięcia, potencjału węzła i mocy w programie graficznym probe;

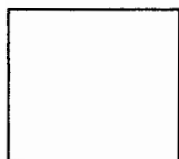
*run — opcjonalny rozkaz wykonania wskazanej analizy lub:

*run minstep=[wartość] — opcjonalny rozkaz wykonania analizy ze wskazaniem minimalnego kroku przyrostu czasu;

*run maxstep=[wartość] — opcjonalny rozkaz wykonania analizy ze wskazaniem maksymalnego kroku przyrostu czasu;

.time=.1m

*dc*print ir1 vc v3 ... itd. } przykładowe opcje analizy do wykonania
*run } po zdefiniowaniu pierwszego bloku;



ewentualny, kolejny blok zawierający opis obwodu o zmienionej strukturze, nowych wartościach parametrów elementów obwodu lub żądanie wykonania innej analizy bądź analizy tego samego obwodu, ale przy innych założeniach (np. zmienionym przedziale czasu lub częstotliwości);

```
*time 0 .1
*tr*probe ir1 vc v3 ... itd.
*run minstep=1e-3
```

} przykładowe opcje analizy do wykonania
po zdefiniowaniu drugiego bloku;

```
*reset
.r2=[nowa wartość]
```

ewentualny kolejny blok, w którym rozkaz `*reset` oznacza, że w analizie po tym bloku nie będą uwzględniane wyniki analiz wcześniejszych. Wyrażenie `.r2=[nowa wartość]` oznacza nadanie nowej wartości rezystancji rezystorowi oznaczonemu przez `r2`;

```
*freq 0 100 .1
*ac*probe *ma vc *ph vc ... itd.
*run
```

} przykładowe opcje analizy do wykonania
po zdefiniowanym bloku;

`*end` — nieopcjonalne polecenie końca programu;

`Alt w` — rozkaz zapisu tekstu programu w edytorze BRIEF;

`Alt x` — rozkaz wyjścia z edytora BRIEF;

Rozpoczęcie obliczeń dokonuje się przez wczytanie następujących poleceń:

`nap` $\Leftarrow$ Enter — tryb interakcyjny pracy w NAP;

`nap [nazwa programu]` $\Leftarrow$ Enter — polecenie wykonania programu o określonej nazwie;

`nap [nazwa programu [nazwa zbioru wyników analizy]]` $\Leftarrow$ Enter — wyniki analizy są gromadzone w zbiorze o zdefiniowanej nazwie;

`probe` $\Leftarrow$ Enter — wywołanie programu graficznego `probe`.

W zależności od celów symulacji są możliwe dodatkowe nieopcjonalne rozkazy. Między innymi:

`*modify [nazwa elementu]=[wartość] ...` — modyfikacja wartości parametru wskazanych elementów,

`*modify [i[nazwa cewki]]= [wartość] ...` — zadawanie wartości początkowej prądu płynącego przez wskazaną cewkę,

`*modify [v[numer węzła]]= [wartość] ...` — zadawanie wartości początkowej we wskazanych węzłach obwodu,

`*modify vnall=[wartość] ...` — zadanie jednakowej wartości początkowej napięcia we wszystkich węzłach obwodu,

`*modify iall=[wartość] ...` — zadanie jednakowej wartości początkowej prądów płynących przez wszystkie cewki,

- *modify [nazwa]/[stała] ... — pomnożenie lub podzielenie przez stałą,
 *list [kod] ... — rozkaz umożliwiający kontrolowanie procesu analizy, przy
 czym cyfrom kodu odpowiadają następujące testy kontrolne:
- 1 — echo linii realizowanego programu,
 - 2 — opis układu,
 - 9 — statystyka wykonania obliczeń,
 - 14 — wydruk każdego cyklu iteracyjnego.

Rozkaz *modify odnoszący się do elementów obwodu powinien być umieszczony po zdaniach opisujących dane elementy, a rozkaz *list można umieszczać w dowolnym miejscu programu.

6.3.1.2. Zbiór elementów obwodu

A. Liniowe elementy pasywne

Dopuszczalne jest stosowanie elementów: R , G , L , C oraz sprzężeń między dwoma elementami indukcyjnymi (M). Ponadto wartość każdego z elementów może być uzależniona funkcjonalnie od prądu lub napięcia na dowolnym elemencie, w tym i od płynącego przez niego prądu lub odkładającego się na nim napięcia. Każdemu elementowi przypisuje się nazwę składającą się z nie więcej niż ośmiu znaków, przy czym pierwszym symbolem nazwy rezystora musi być litera r , rezystora określanego przez podanie konduktancji — litera g , indukcyjności — litera l , kondensatora — litera c . Informację o elemencie pasywnym zapisuje się w postaci wyrażenia

[nazwa elementu] [n1] [n2] [wartość]

W wyrażeniu tym [n1] [n2] oznaczają węzły, do których jest przyłączony element, przy czym przyjmuje się, że prąd w elemencie jest skierowany od węzła $n1$ do węzła $n2$, napięcie zaś od węzła $n2$ do węzła $n1$. Podając wartości parametru, można korzystać z następujących współczynników skali:

$$e \pm nn \ (nn < 75) \Rightarrow 10^{\pm n}, \ t \Rightarrow 10^{12}, \ g \Rightarrow 10^9, \ meg \Rightarrow 10^6, \ k \Rightarrow 10^3, \\ m \Rightarrow 10^{-3}, \ u \Rightarrow 10^{-6}, \ n \Rightarrow 10^{-9}, \ p \Rightarrow 10^{-12}, \ pi \text{ — liczba } \pi$$

Niżej podajemy przykładowy sposób oznaczania i zapisu informacji o wymienionych elementach.

rk1 1 0 3k — rezystor o nazwie rk1 i rezystancji 3 k Ω dołączony do węzłów 1 i 0;

gk 2 7 0 — rezystor o nazwie gk i konduktancji 0 dołączony do węzłów 2 i 7;

lcewki 10 23 .01 — indukcyjność (cewka) o nazwie lcewki i indukcyjności własnej $L = 0,01$ H włączona pomiędzy węzły 10 i 23;

l2 8 6 15m — indukcyjność (cewka) o nazwie l2 i indukcyjności własnej $L = 15$ mH włączona pomiędzy węzły 8 i 6;

m lcewki l2 .4 — cewki o nazwie lcewki i l2 są sprzężone magnetycznie. Indukcyjność wzajemna $M = 0,4$ H;

c 11 12 10u — kondensator o nazwie c i pojemności $C = 10 \mu\text{F}$ jest włączony między węzły 11 i 12;

rs 2 4 1*f1(irk1) — wartość rezystancji rezystora rs jest uzależniona funkcjonalnie, przez zdefiniowaną wcześniej funkcję f1, od prądu płynącego przez rezystor rk1 (irk1), który jest argumentem tej funkcji.

B. Źródła niezależne (autonomiczne)

Dopuszcza się stosowanie rzeczywistych i idealnych źródeł prądu i napięcia. W programie źródła napięcia definiuje się jako aktywne rezystory, źródła prądu zaś jako aktywne rezystory określane przez konduktancję. Niżej przedstawiamy sposoby zapisu informacji o poszczególnych źródłach i kilka charakterystycznych przykładów.

Źródło napięcia stałego

[nazwa zaczynająca się od litery r] [n1] [n2] [rezystancja wewnętrzna]
[e=[wartość]]

PRZYKŁADY:

re 1 0 0 e=100 — źródło napięcia stałego o rezystancji wewnętrznej $R_w = 0$ i napięciu źródłowym 100 V, włączone pomiędzy węzły 1 i 0, przy czym wyższy potencjał (potencjał dodatni) jest związany z węzłem 1;

r1 3 8 .01 e=24 — źródło napięcia stałego o rezystancji wewnętrznej $R_w = 0,01 \Omega$ i napięciu źródłowym 24 V, włączone pomiędzy węzły 3 i 8, przy czym wyższy potencjał jest związany z węzłem 3.

Źródło prądu stałego

[nazwa zaczynająca się od litery g] [n1] [n2] [konduktancja wewnętrzna]
[j=[wartość]]

PRZYKŁADY:

gj 1 0 0 j=1 — idealne źródło prądu stałego o wartości $I_z = 1 \text{ A}$, włączone pomiędzy węzły 1 i 0. Prąd do obwodu wypływa z węzła 1;

gkk 2 0 .1 j=100m — rzeczywiste źródło prądu stałego o prądzie źródłowym $I_z = 100 \text{ mA}$ i konduktancji wewnętrznej $G_w = 0,1 \text{ S}$. Źródło jest włączone pomiędzy węzły 2 i 0, prąd zaś do obwodu wypływa z węzła 2.

Źródło napięcia sinusoidalnie zmiennego w funkcji czasu — w postaci zespolonej

[nazwa zaczynająca się od litery r] [n1] [n2] [rezystancja wewnętrzna]
[ma=[wartość]] [ph=[wartość]]

lub

[nazwa zaczynająca się od litery r] [n1] [n2] [rezystancja wewnętrzna]
[re=[wartość]] [im=[wartość]]

gdzie ma jest modulem, ph argumentem podawanym w stopniach, re częścią rzeczywistą, im częścią urojoną napięcia źródłowego.

PRZYKŁADY:

re1 2 4 0 $ma=220$ — idealne źródło napięcia zespolonego o wartości $\underline{E} = 220 \text{ V}$;

rrrr2 0 11 .5 $ma=100$ $ph=90^\circ$ — rzeczywiste źródło napięcia zespolonego $\underline{E} = 100e^{j90^\circ}$ o rezystancji wewnętrznej $R_w = 0,5 \Omega$;

rec 3 4 0 $re=-190$ $im=-110$ — idealne źródło napięcia zespolonego $\underline{E} = (-190 - j110) \text{ V}$;

Źródło prądu sinusoidalnie zmiennego w funkcji czasu — w postaci zespolonej

[nazwa zaczynająca się od litery g] [n1] [n2] [konduktancja wewnętrzna]
[ma=[wartość]] [ph=[wartość]]

lub

[nazwa zaczynająca się od litery g] [n1] [n2] [konduktancja wewnętrzna]
[re=[wartość]] [im=[wartość]]

Źródło napięcia o napięciu źródłowym zmiennym w funkcji czasu

[nazwa zaczynająca się od litery r] [n1] [n2] [rezystancja wewnętrzna]
[e=[wartość]]*[funkcja (const.*time)]

gdzie wyrażenie funkcja oznacza wcześniej zdefiniowaną funkcję o dowolnej nazwie nie rozpoczynającej się od liter: r, l, c, g, m, v, i, p oraz pw, której argumentem jest czas (time) ewentualnie pomnożony przez stałą. Zmienność napięcia w czasie może być opisana przez standardowe funkcje elementarne lub zdefiniowana w postaci tablicy (patrz p. 6.3.1.3).

PRZYKŁADY:

sin/sin/

re 1 0 0 $e=311*\sin(100\pi*time)$ — zdanie opisujące idealne źródło napięcia o napięciu źródłowym $e = 311\sin 314t$. W wyrażeniu sin/sin/, sin oznacza nazwę funkcji. Rodzaj funkcji jest zdefiniowany przez człon /sin/, zaś $100\pi = 100\pi = 314$;

f1/tab1/ ...

r1 10 11 0 $e=10k*f1(time)$ — zdanie opisujące idealne źródło napięcia, którego zmienność w czasie jest wyrażona przez funkcję o nazwie f1 zadaną w postaci tablicy tab1.

Źródło prądu o prądzie źródłowym zmiennym w funkcji czasu

[nazwa zaczynająca się od litery g] [n1] [n2] [konduktancja wewnętrzna]
[j=[wartość]]*[funkcja (const.*time)]

C. Źródła sterowane

Program symulacyjny NAP dopuszcza stosowanie wszystkich czterech źródeł sterowanych, a mianowicie:

- źródła napięcia sterowanego napięciem, wyrażającego funkcję $u = k_{uu} u_s$;
- źródła napięcia sterowanego prądem, wyrażającego funkcję $u = k_{ui} i_s$;
- źródła prądu sterowanego prądem, wyrażającego funkcję $i = k_{ii} i_s$;
- źródła prądu sterowanego napięciem, wyrażającego funkcję $i = k_{iu} u_s$.

Sygnałami sterującymi mogą być wyłącznie napięcia lub prądy odniesione do elementu obwodu, natomiast nie mogą być np. potencjały węzłów. Współczynniki wzmocnienia mogą być stałymi lub mogą być uzależnione funkcjonalnie zarówno od sygnału sterującego, jak i każdego innego napięcia lub prądu. Ponadto niektóre wersje programu umożliwiają posługiwanie się źródłami sterowanymi, w których sygnały sterujące są pochodnymi napięcia lub prądu. W takich przypadkach sygnał sterujący jest opcjonalnie poprzedzony literą s. Opcjonalnie pierwszą literą nazwy sterowanego źródła napięcia jest litera v, źródła prądu zaś litera i.

Niżej przedstawiamy sposób zapisu informacji o poszczególnych źródłach sterowanych i kilka charakterystycznych przykładów.

Źródło napięcia sterowane napięciem

[nazwa zaczynająca się od litery v] [n1] [n2] [k_{uu}] [v[nazwa elementu]]

PRZYKŁADY:

r1 2 3 1k

vr1 4 5 100 vr1 — źródło napięcia o nazwie vr1, sterowane napięciem z rezystora r1. Współczynnik wzmocnienia $k_{uu} = 100$;

r1 2 3 1k

vr1 4 5 1*ir1 vr1 — źródło napięcia o nazwie vr1, którego wartość określa wyrażenie $u = i_{r1} u_{r1}$, gdzie i_{r1} jest prądem płynącym przez rezystor r1, u_{r1} zaś napięciem na tym rezystorze;

r1 2 3 1k

vr1 4 5 1*ir1 svr1 — źródło napięcia o nazwie vr1, którego wartość określa wyrażenie $u = i_{r1} \frac{d}{dt} u_{r1}$.

Źródło napięcia sterowane prądem

[nazwa zaczynająca się od litery v] [n1] [n2] [k_{ui}] [i[nazwa elementu]]

PRZYKŁAD:

cr1 1 0 10u

vc 1 2 1 icr1 — źródło napięcia sterowane prądem płynącym przez kondensator o nazwie cr1.

Źródło prądu sterowane prądem

[nazwa zaczynająca się od litery i] [n1] [n2] [k_{ii}] [i[nazwa elementu]]

Źródło prądu sterowane napięciem

[nazwa zaczynająca się od litery i] [n1] [n2] [k_{iu}] [v[nazwa elementu]]

6.3.1.3. Funkcje stosowane w NAP

Zdanie opisujące funkcję ma następującą postać

[nazwa funkcji]/typ funkcji/ [lista subparametrów]

Nazwa funkcji dowolna, o ile nie zaczyna się od liter: r, g, l, c, m, v, i, p oraz pw. Dopuszczalne są następujące typy funkcji: abs, exp, log, sin, tan, atan, tab1, tab2, sub, // — funkcja pusta. Lista subparametrów ma trzy postacie:

lista1 $\Rightarrow$ a=[wartość] b=[wartość] c=[wartość] d=[wartość] e=[wartość]

Wartości mogą być stałymi lub wielkościami uzależnionymi funkcyjnie, parametry zaś są współczynnikami w wyrażeniu funkcyjnym

$$f(x) = a + b \cdot [\text{typ funkcji}(x - c)/d]^e$$

lub w wyrażeniu funkcyjnym

$$f(x) = a + b \cdot [\text{typ funkcji}(c \cdot x - d)]^e$$

Postać wyrażenia funkcyjnego zależy od wersji NAP, którym posługuje się użytkownik.

W drugim wyrażeniu, gdy przez typ funkcji definiujemy funkcję trygonometryczną, parametr d odpowiada fazie początkowej. Aby parametr ten odpowiadał fazie początkowej określonej w stopniach, należy w liście parametrów podając wartość d wpisać w kodzie ASCII znak stopnia (°). Znakowi temu odpowiada cyfra 248 wpisywana z klawiatury numerycznej, przy wciśniętym przycisku Alt.

Przykład odnoszący się do pierwszej postaci wyrażenia funkcyjnego:

sin/sin/ b=100 c=0 d=3,19e-3 e=1

f1 = 1 * sin(time) $\Rightarrow$ f1 = sin314t.

Przykład odnoszący się do drugiej postaci wyrażenia funkcyjnego:

sin/sin/ b=100 c=314 d=30°

f1 = 1 * sin(time) $\Rightarrow$ f1 = 100 sin(314t - 30°)

lub

sin/sin/ d=30°

f1 = 100 * sin(100pi*time) $\Rightarrow$ f1 = 100 sin(314t - 30°)

lista2 $\Rightarrow$ p=[wartość] l=[wartość] u=[wartość] sl=[wartość] su=[wartość]

Wartości mogą być stałymi lub wielkościami uzależnionymi funkcyjnie, natomiast parametry opisują ograniczenia na funkcji $f(x)$, a więc:

- p — jeśli $p > 0$, to parametr ten jest okresem funkcji. Wartość wbudowana $p = 0$ jest podstawiana, gdy nie podano żadnej wartości;
- l — ograniczenie dolne na x . Jeśli $x < 0$, to $f(x) = f(l) + f'(l)(x - l)$. Wartość wbudowana $l = -10^{-74}$;
- u — ograniczenie górne na x . Jeśli $x > u$, to $f(x) = f(u) + f'(u)(x - u)$. Wartość wbudowana $u = 10^{74}$;
- sl — nachylenie funkcji przy ograniczeniu dolnym. Jeśli $x < 0$ i $sl \neq 0$, to $f(x) = f(l) + sl(x - l)$. Wartość wbudowana $sl = 0$;
- su — nachylenie funkcji przy ograniczeniu górnym. Jeśli $x > 0$ i $su \neq 0$, to $f(x) = f(u) + su(x - u)$. Wartość wbudowana $su = 0$.

PRZYKŁAD:

f1 // l2 u=2

r1 1 2 1*f1(ir1) — nieliniowy rezystor o charakterystyce parabolicznej w przedziale zmian prądu od 0 do 2 A oraz o charakterystyce liniowej dla prądów większych niż 2 A.

lista3 $\Rightarrow$ [stała]*[wielkość] [stała]*[wielkość]...,

przy czym wielkość — stała lub odpowiedź obwodu (nie pierwotna).

Lista3 opisuje ciąg wartości dodawanych do funkcji. Można więc wyrazić ją w postaci zależności funkcyjnej

$$f(x) = a + b[\text{typ funkcji}(x - c)/d)]^e + \text{wartość} + \text{wartość} + \dots$$

PRZYKŁAD:

r1 4 1 1; r2 4 2 1; r3 4 3 1

sum // 1*ir1 1*ir2 — funkcja określająca sumę prądów $i_{R1} + i_{R2}$;

prad = 1*sum(ir3) — funkcja określająca prąd i_{R3} jako sumę $i_{R3} = i_{R1} + i_{R2}$.

Funkcje tab1 i tab2

Funkcje tab1 i tab2, będące w istocie tabelarycznym opisem funkcji odcinkowoliniowej, definiuje lista3, przy czym wartości w tej liście mają specjalne znaczenie.

Zdanie opisujące funkcję tab1 ma postać:

[nazwa funkcji]/tab1/ c=[wartość] d=[wartość] [y1] [y1]...

Funkcja w podanym zapisie jest określona tablicą, w której c oznacza minimalną wartość współrzędnej x , zaś $d = \Delta x$ — jest równomiernym przyrostem tej współrzędnej. Kolejne wartości $y_1, y_2, y_3, \dots$ określają wartość funkcji w punktach $x_1 = c, x_2 = c + d, x_3 = c + 2d, \dots$

Zdanie opisujące funkcję tab2 ma postać

[nazwa funkcji]/tab2/ p=[wartość] [x1 [y1] [x2 [y1] ...

Jest to funkcja opisana przez podanie współrzędnych kolejnych punktów. Parametr $p = T$ — oznacza okres funkcji.

6.3.1.4. Modele wbudowane i biblioteki elementów

W programie NAP istnieje możliwość odwoływania się do tzw. *wbudowanych modeli elementów*, przede wszystkim elektronicznych. Do elementu wbudowanego odwołujemy się formułując zdania:

[nazwa elementu]/typ elementu/ [lista subparametrów] — wywołanie elementu,

[t nazwa] [węzeł1] [węzeł2] ... [nazwa elementu] — element obwodu o nazwie zaczynającej się od litery t, w którym zastosowano element wbudowany o określonej wcześniej nazwie.

Możliwe jest posługiwanie się następującymi elementami o nazwie:

dioda — dioda złączowa p-n,

nnp — tranzystor bipolarny n-p-n,

pnp — tranzystor bipolarny p-n-p,

njfet — tranzystor unipolarny z kanałem n,

pjfet — tranzystor unipolarny z kanałem p.

PRZYKŁAD:

d1/diode/

td1 2 3 d1

td2 4 3 d1

W programie NAP jest dopuszczalne jednoczesne istnienie sześciu *bibliotek elementów* o nazwach lib1, lib2, ... lib6, przy czym użytkowany program zawiera przynajmniej bibliotekę lib1. Do istniejącej biblioteki odwołujemy się formułując zdania:

*lib[n] [nazwa elementu] — wywołanie elementu bibliotecznego o określonej nazwie,

[t nazwa] [węzeł1] [węzeł2] ... [nazwa elementu] — opis elementu obwodu o nazwie poprzedzonej literą t wykorzystującego element biblioteczny.

PRZYKŁAD:

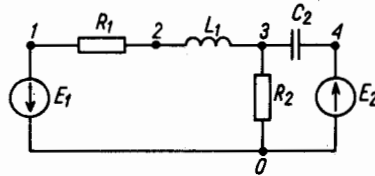
*lib1 bc107 — wywołanie modelu tranzystora BC107,

t 2 1 3 bc107 — element o nazwie t, włączony pomiędzy węzły: 1 (baza), 2 (kolektor), 3 (emiter) jest tranzystorem typu BC107.

Szczegółowy opis programu NAP, w tym w szczególności opis listy subparametrów elementów wbudowanych oraz zawartość biblioteki lib1, czytelnik może znaleźć w książce [9].

6.3.2. Analiza stałoprądowa

6.35. Dany jest obwód o strukturze jak na rys. 6.33. Wyznaczyć prądy gałęziowe i napięcia na elementach wykorzystując program NAP. Dane: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $L_1 = 0,1 \text{ H}$, $C_2 = 10 \mu\text{F}$.



Rys. 6.33

ROZWIĄZANIE. Wykorzystując oznaczenia węzłów pokazane na rysunku oraz stosując oznaczenia elementów analogiczne do występujących w obwodzie, piszemy program, którego oryginalny tekst i wydruk wyników są zamieszczone poniżej.

```
*circuit
:zadanie 6.35
re1 0 1 0 e=10 :zrodlo napiecia
r1 1 2 1
l1 2 3 .1
r2 3 0 1
c2 4 3 10u
re2 4 0 0 e=12 :zrodlo napiecia
*dc *print ir1 ir2 ic2 vr1 vl1 vr2 vc2
*run
*end
```

1PC-NAP *dc

date 94/04/13

time 08:28:49

time	ir1	ir2	ic2	vr1
vc2	vl1	vr2		
0.000000E+00	-5.000000E+00	-5.000000E+00	0.000000E+00	-5.000000E+00
1.700000E+01	0.000000E+00	-5.000000E+00		

Wyniki obliczeń są zgodne z wynikami obliczeń otrzymanymi inną metodą, np. wykonanymi w sposób klasyczny.

6.36. W obwodzie z rysunku 6.33 źródło napięcia stałego E_1 zastąpiono źródłem napięcia sinusoidalnego $e_1(t) = 10 \sin 2\pi t$. Stosując program NAP, obliczyć dla chwili $t_1 = 0,25 \text{ s}$ oraz $t_2 = 0,5 \text{ s}$ analogiczne wielkości jak w zadaniu 6.35.

Odpowiedź. Program analizy i jej wyniki są przedstawione poniżej.

```
*circuit
:zadanie 6.36
sin/sin/ :funkcja sinus
re1 0 1 0 e=10*sin(2pi*time) :zrodlo napiecia sinusoidalnego
.time=.25 :zalozona pierwsza chwila czasowa
g 0 1 1
r1 1 2 1
l1 2 3 .1
r2 3 0 1
c2 4 3 10u
re2 4 0 0 e=12 :zrodlo napiecia
*dc*print vre1 ir1 ir2 ic2 vr1 vl1 vr2 vc2
*run
.time=.5 :zalozona druga chwila czasowa
*dc*print vre1 ir1 ir2 ic2 vr1 vl1 vr2 vc2
*run
*end
```

```
1PC-NAP *dc
date 94/04/15
time 15:53:53
```

time	vre1	ir1	ir2	ic2
vr2	vc2	vr1	vl1	
2.500000E-01	1.000000E+01	-5.000000E+00	-5.000000E+00	0.000000E+00
-5.000000E+00	1.700000E+01	-5.000000E+00	0.000000E+00	

```
1PC-NAP *dc
date 94/04/15
time 15:53:53
```

time	vre1	ir1	ir2	ic2
vr2	vc2	vr1	vl1	
5.000000E-01	3.231085E-14	-1.615543E-14	-1.615543E-14	0.000000E+00
-1.615543E-14	1.200000E+01	-1.615543E-14	0.000000E+00	

Wyniki analizy są poprawne.

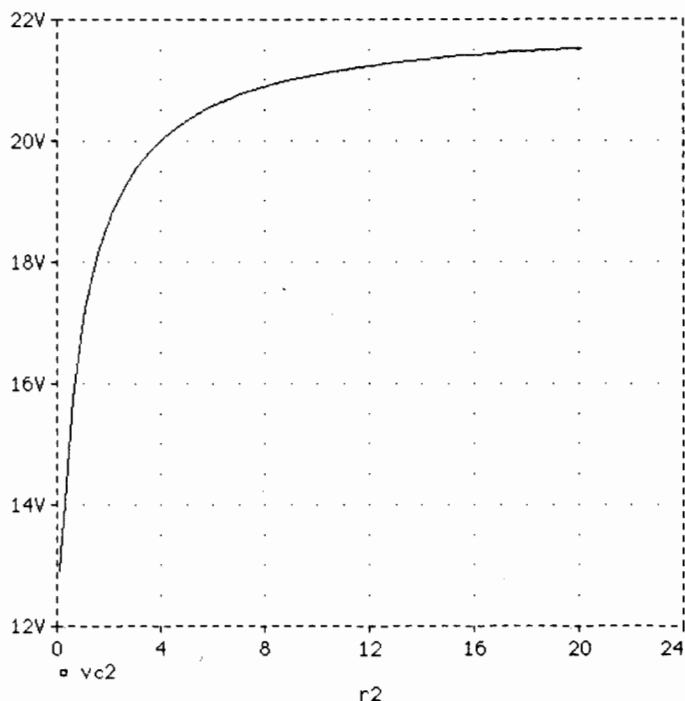
6.37. Wykorzystując program NAP, wyznaczyć zmianę napięcia na kondensatorze C_2 (rys. 6.33) w funkcji zmian rezystancji rezystora R_2 w zakresie od 0,1 do 20 Ω .

Odpowiedź. Poniżej jest przedstawiony program analizy i wykres zmian napięcia $vc2$ w funkcji rezystancji rezystora R_2 (rys. 6.34). Wykres otrzymano dzięki zastosowaniu programu graficznego probe.

```

*circuit
:zadanie 6.37
re1 0 1 0 e=10 :zrodlo napiecia
r1 1 2 1
l1 2 3 .1
r2 3 0 1
c2 4 3 10u
re2 4 0 0 e=12 :zrodlo napiecia
*time r2 .1 20 .5 :uzmiennienie rezystancji
*dc*probe vc2
*run
*end

```



Rys. 6.34

6.38. Dany jest wzmacniacz napięcia odwracający fazę, zbudowany z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego (rys. 6.35a). Wyznaczyć transmitancję układu modelując wzmacniacz źródłem napięcia sterowanym napięciem. Obliczenia wykonać dla danych: $E = 1 \text{ V}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $k = 10^8$.

ROZWIĄZANIE. Równoważny badanemu układowi obwód jest przedstawiony na rys. 6.35b. W obwodzie tym wzmacniacz operacyjny jest modelowany źródłem napięcia sterowanym napięciem z dodatkowo włączonego rezystora g o konduktancji $G = 0$. Dla obwodu tego ułożono program, którego tekst jest przedstawiony poniżej.

```

*circuit
:zadanie 6.38
re 1 0 0 e=1
r1 1 3 1k
r2 3 2 10k
g 3 0 0 :dodatkowy element, z którego jest sterowany wzmacniacz
operacyjny
vop 0 2 10e8 vg :zrodlo napiecia symulujace wzmacniacz operacyjny
*dc*print v2/ere :v2/ere — transmitancja napieciowa
*run
*end

```

W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano:

1PC-NAP *dc

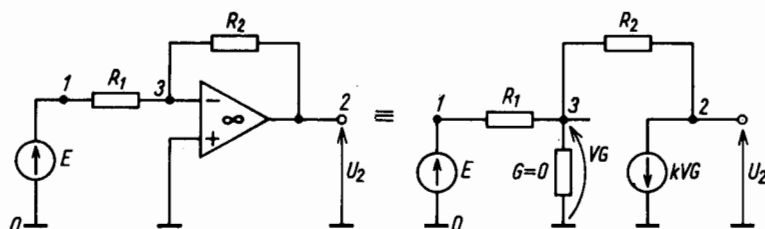
date 94/04/15

time 16:04:17

```

time          v2/ere
0.000000E+00  -1.000000E+01

```



Rys. 6.35

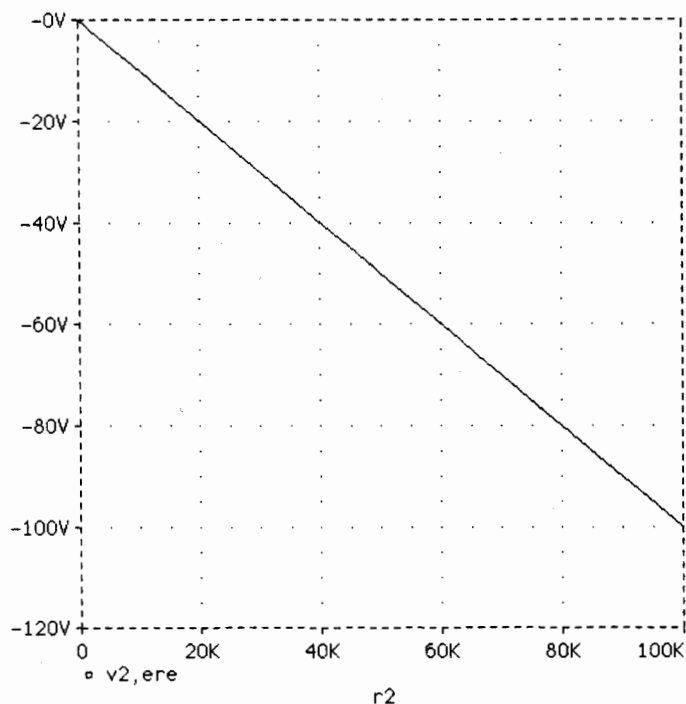
6.39. Wyznaczyć zależność transmitancji układu z rys. 6.35a od zmian rezystancji rezystora R_2 . Przyjąć, że rezystancja R_2 zmienia się w granicach od 1 k Ω do 100 k Ω .

Odpowiedź. Poniżej jest przedstawiony program analizy i krzywa obrazująca żadaną charakterystykę (rys. 6.36).

```

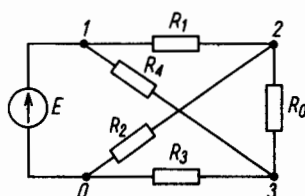
*circuit
:zadanie 39
re 1 0 0 e=1
r1 1 3 1k
r2 3 2 10k
g 3 0 0 :dodatkowy element, z którego jest sterowany wzmacniacz
operacyjny
vop 0 2 10e8 vg :zrodlo napiecia symulujace wzmacniacz operacyjny
*time r2 1 100k 1k :uzmiennienie rezystancji rezystora r2
*dc*probe v2/ere :transmitancja ukkladu
*run
*end

```



Rys. 6.36

6.40. Dany jest układ mostkowy o strukturze pokazanej na rys. 6.37.



Rys. 6.37

Zaproponować sposób wyznaczenia wartości rezystancji rezystora R_2 równoważącego mostek ($I_0 = 0$) z wykorzystaniem programu NAP. Dane: $E = 12 \text{ V}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 6,3 \text{ k}\Omega$, $R_0 = 2 \text{ k}\Omega$.

ROZWIĄZANIE. Równowaga mostka występuje wówczas, gdy prąd $I_0 = 0$. Wyznaczając zależność $I_0(R_2)$, możemy określić poszukiwaną wartość rezystancji. Wyznaczenie interesującej nas charakterystyki umożliwia następujący program:

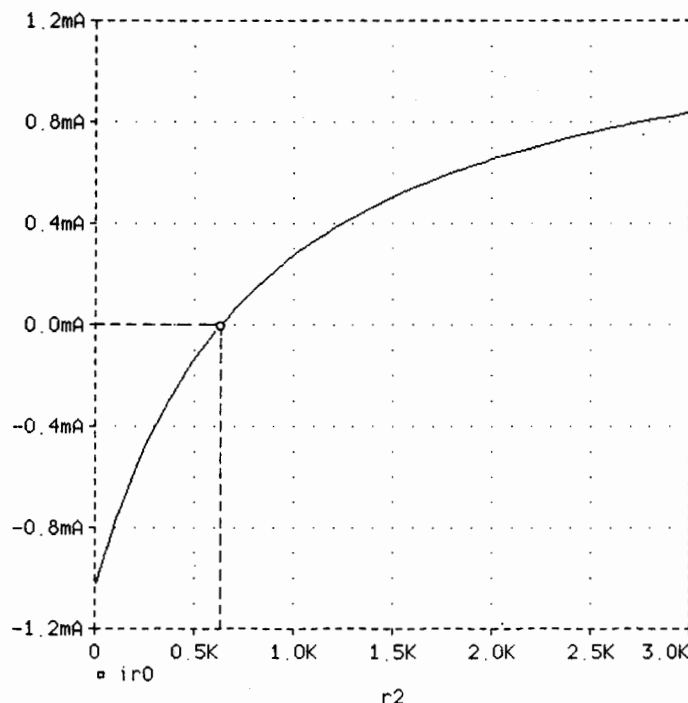
```
*circuit
re 1 0 0 e=12
r1 1 2 1k
```

```

r2 2 0 1k
r3 3 0 4k
r4 1 3 6.3k
r0 2 3 2k
*time r2 10 3k 50 :uzmiennienie rezystancji
*dc*probe ir0 :prad rownowagi
*run
*end

```

Z rysunku 6.38 dla $I_0 = ir0 = 0$ odczytujemy $R_2 = r2 = 635 \Omega$.



Rys. 6.38

6.41. W obwodzie przedstawionym na rys. 6.39 obliczyć napięcie na zaciskach kondensatora oraz prąd płynący przez cewkę. Ponadto sprawdzić bilans napięć w oczku zawierającym kondensator i cewkę. Obliczenia wykonać korzystając z programu NAP. Dane: $I_z = 2 \text{ A}$, $E = 100 \text{ V}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $L = 0,1 \text{ H}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$.

Odpowiedź. Program analizy i jej wyniki są przedstawione poniżej:

```

*circuit
gi 0 1 0 j=2 :idealne zrodlo pradu
re 2 4 0 e=100

```

```

c 1 2 10u
r1 1 3 20
l 3 4 .1
r2 4 0 40
s1// 1*vc 1*vl -1*vre :realizacja sumy napiec w oczku
s2=1*s1(vr1)
*dc*print vc il s2
*run
*end

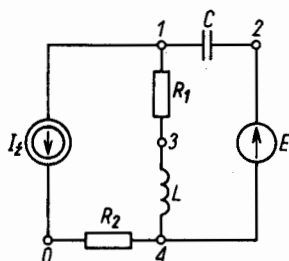
```

1PC-NAP *dc

date 94/04/15

time 16:05:06

time	vc	il	s2
0.000000E+00	-6.000000E+01	2.000000E+00	0.000000E+00



Rys. 6.39

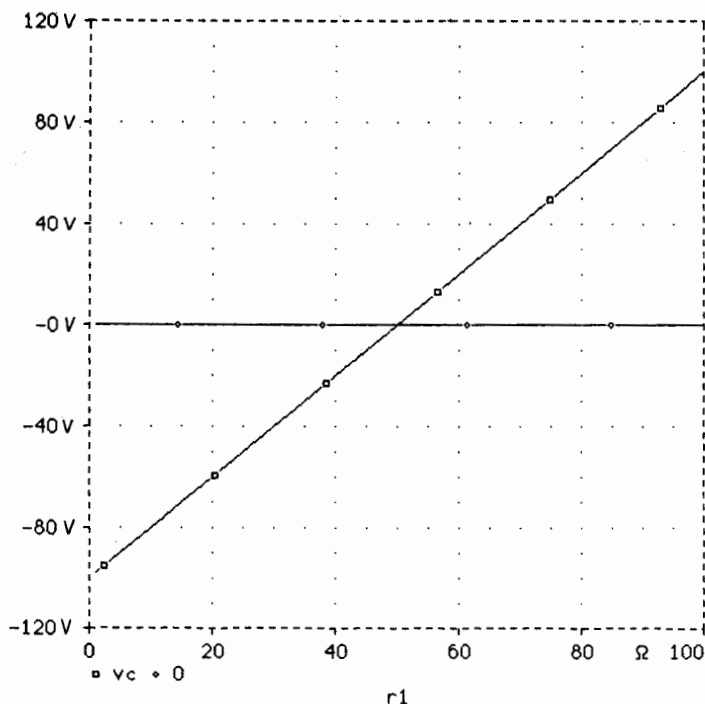
6.42. Dla układu z rys. 6.39 opracować program umożliwiający dobór rezystancji rezystora R_1 tak, aby napięcie na kondensatorze było równe zero.

Odpowiedź. Wartość rezystancji odczytujemy z rys. 6.40. Dla $vc = U_C = 0$ znajdujemy $R_1 = 49,4 \Omega$.

```

*circuit
gi 0 1 0 j=2
re 2 4 0 e=100
c 1 2 10u
r1 1 3 20
l 3 4 .1
r2 4 0 40
*time r1 1 100 5
*dc*probe vc
*run
*end

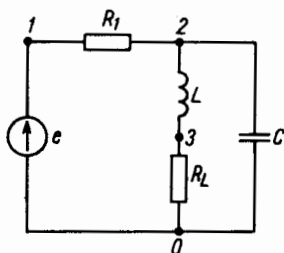
```

Rys. 6.40

6.3.3. Analiza obwodów przy wymuszeniach zespolonych

6.43. Zakładając, że w obwodzie przedstawionym na rys. 6.41 źródło napięcia generuje sygnał $e = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)$, opracować program umożliwiający obliczenie wartości skutecznych zespolonych prądów gałęziowych. Dane: $R_1 = 0,2 \Omega$, $L = 0,02 \text{ H}$, $R_L = 1 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $f = 50 \text{ Hz}$.



Rys. 6.41

ROZWIĄZANIE. Dążenie do wyznaczenia wartości zespolonych sygnałów elektrycznych oznacza, że badamy stan ustalony obwodu. Obliczając zatem prądy, będziemy posługiwać się metodą liczb zespolonych, dzięki której mo-

żemy analizę obwodu sprowadzić do rozwiązania układu równań algebraicznych. W programie NAP analiza stanu ustalonego w obwodzie liniowym, przy wymuszeniach sinusoidalnie zmiennych w funkcji czasu o ustalonej częstotliwości, jest wykonywana w wyniku polecenia `*ac`, przy czym wymagane jest podanie informacji o sygnałach źródłowych w postaci zespolonej. W badanym obwodzie napięcie wymuszające przekształcone do postaci zespolonej ma postać

$$\underline{E} = 220e^{-j\pi/2} = -j220 \text{ V}$$

W programie napięcie to możemy zadać w obu postaciach. Poniżej jest przedstawiony program analizy, przy czym interesującymi nas prądami gałęziowymi są prądy płynące przez elementy R_1 , L i C . Zażądano obliczeń prądów w postaci algebraicznej i wykładniczej.

```
*circuit
re 1 0 .2 re=0 im=-220 :zrodlo napiecia
.freq=50 :zadana czestotliwosc
r1 1 2 .2
l 2 3 .02
rl 3 0 1
c 2 0 100u
*ac*print *re ir1 *im ir1 *re il *im il *re ic *im ic :postac algebraiczna
*run
*ac*print *ma ir1 *ph ir1 *ma il *ph il *ma ic *ph ic :post. wyklad.
*run
*end
```

6.44. W układzie z rys. 6.41 wyznaczyć częstotliwość, przy której występuje zjawisko rezonansu prądów. Ponadto wyznaczyć charakterystyki przedstawiające zmianę modułów i argumentów prądów płynących w gałęziach obwodu w funkcji częstotliwości.

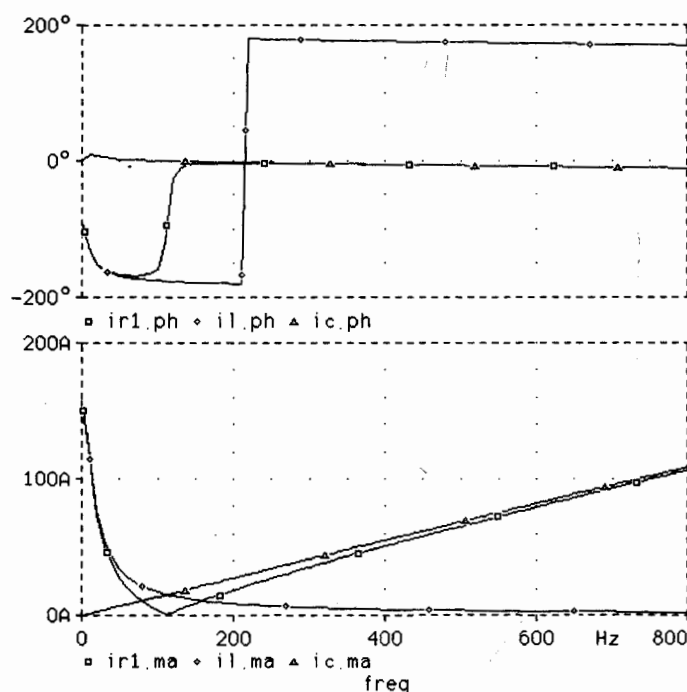
Odpowiedź. Poniżej jest przedstawiony program analizy i wykresy modułów i argumentów prądów w funkcji częstotliwości (rys. 6.42). Z wykresu można odczytać, że częstotliwość rezonansowa (dla $ir1.ma = 0$) $f_0 \approx 110,1 \text{ Hz}$.

```
*circuit
re 1 0 .2 re=0 im=-220
r1 1 2 .2
l 2 3 .02
rl 3 0 1
```

```

c 2 0 100u
*freq .1 .8k 10 :uzmiennienie czestotliwosci
*ac*probe *ma ir1 *ph ir1 *ma il *ph il *ma ic *ph ic
*run
*end

```



Rys. 6.42

6.45. W obwodzie z rys. 6.41 dobrać tak pojemność kondensatora, by przy częstotliwości źródła $f = 50$ Hz wystąpiło zjawisko rezonansu prądów.

ROZWIĄZANIE. Sformułowany w zadaniu problem możemy rozwiązać analizując np. zmianę modułu i argumentu prądu wypływającego ze źródła w funkcji zmian pojemności kondensatora C . Wykonując obliczenia zgodnie z przedstawionym niżej programem, wyznaczamy żądane krzywe (rys. 6.43), z których odczytujemy, że minimalna wartość prądu $ir1$ oraz wartość argumentu równa argumentowi napięcia źródła (-90°) występują przy $C = 0,5$ mF.

```

*circuit
re 1 0 .2 re=0 im=-220
.freq=50
r1 1 2 .2
l 2 3 .02
rl 3 0 1

```

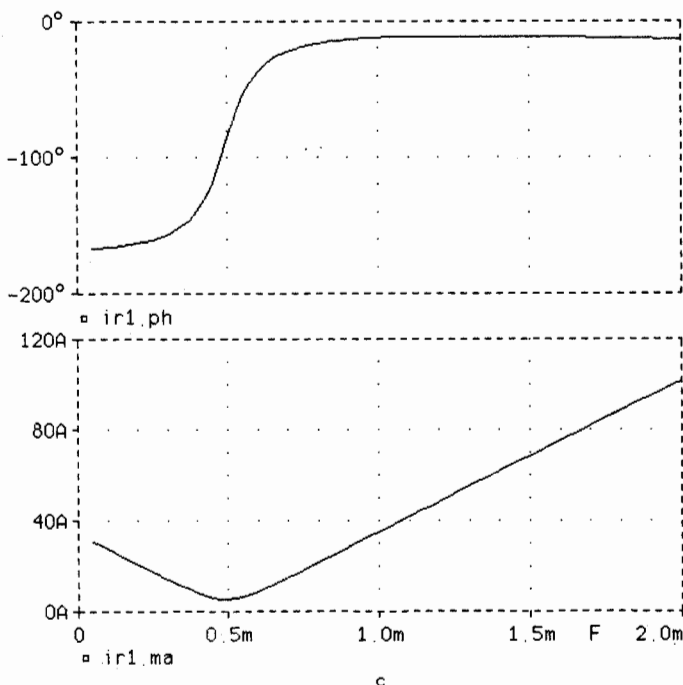
c 2 0 100u

*freq c 50u 2m 25u :uzmiennienie pojemnosci kondensat.

*ac*probe *ma ir1 *ph ir1

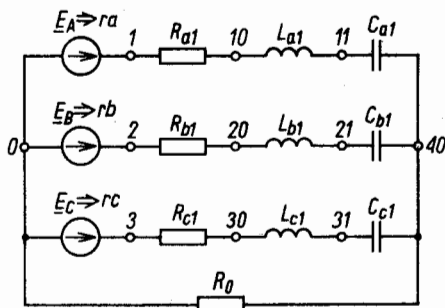
*run

*end



Rys. 6.43

6.46. W obwodzie trójfazowym przedstawionym na rys. 6.44 obliczyć prądy fazowe oraz prąd w przewodzie neutralnym. Dane: $\underline{E}_A = 220 \text{ V}$, $\underline{E}_B = 200e^{j120^\circ} \text{ V}$, $\underline{E}_C = 220e^{-j120^\circ} \text{ V}$, $R_{a1} = R_{b1} = R_{c1} = 10 \Omega$, $L_{a1} = L_{b1} = L_{c1} = 0,2 \text{ H}$, $C_{a1} = C_{b1} = C_{c1} = 50 \mu\text{F}$, $R_0 = 0,1 \Omega$, $f = 50 \text{ Hz}$.



Rys. 6.44

ROZWIĄZANIE. Stosując oznaczenia węzłów i elementów jak na rysunku, piszemy program o postaci

```
*circuit
:obwód trojfazowy gwiazda – gwiazda
ra 1 0 0 ma=220 ph=0 :zasilanie fazy A
rb 2 0 0 ma=220 ph=120 :zasilanie fazy B
rc 3 0 0 ma=220 ph=-120 :zasilanie fazy C
.freq=50 :czestotliwosc zrodla
:obciazenie fazy A
ra1 1 10 10
la1 10 11 .2
ca1 11 40 50u
:obciazenie fazy B
rb1 2 20 10
lb1 20 21 .2
cb1 21 40 50u
:obciazenie fazy C
rc1 3 30 10
lc1 30 31 .2
cc1 31 40 50u
:wlaczenie przewodu neutralnego
r0 40 0 .1
*ac*print*ma ira1 *ph ira1 *ma irb1 *ph irb1 *ma irc1 *ph irc1 *ma ir0
*ph ir0
*run
*end
```

W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy

1PC-NAP *ac				date 94/04/15
				time 16:06:45
freq	ira1.ma	ira1.ph	irb1.ma	irb1.ph
ir0.ma	ir0.ph	irc1.ma	irc1.ph	
5.000000E+01	2.192459E+01	4.745381E+00	2.192459E+01	1.247454E+02
1.458562E-11	4.596774E+00	2.192459E+01	-1.152546E+02	

Analiza tych wyników wskazuje na ich poprawność. Można przyjąć, że prąd w przewodzie neutralnym jest równy zeru, gdyż wyznaczona wartość w porównaniu z prądami fazowymi istotnie jest bliska zeru, a jego liczbowa wartość różna od zera jest rezultatem zaokrążeń numerycznych.

6.47. W układzie z rys. 6.44 i dla danych jak w zadaniu 6.46 wyznaczyć prądy fazowe oraz prąd w przewodzie neutralnym po zwarcu elementów

fazy A. Obliczenia wykonać w układzie z przewodem neutralnym i bez przewodu neutralnego.

ROZWIĄZANIE. Zwarcie fazy odbiornika możemy symulować dołączając równolegle do zacisków fazy A dodatkowy rezystor o rezystancji $R_d = 0$, natomiast odłączenie przewodu neutralnego przez usunięcie rezystora $R_0(r0-)$. Otrzymamy zmodyfikowany program o postaci

```
*circuit
:obwód trojfazowy gwiazda – gwiazda z przewodem neutralnym
ra 1 0 0 ma=220 ph=0 :zasilanie fazy A
rb 2 0 0 ma=220 ph=120 :zasilanie fazy B
rc 3 0 0 ma=220 ph=-120 :zasilanie fazy C
.freq=50 :czestotliwosc zrodla
:obciazenie fazy A
ra1 1 10 10
la1 10 11 .2
ca1 11 40 50u
rd 1 40 0 :zwarcie fazy A
:obciazenie fazy B
rb1 2 20 10
lb1 20 21 .2
cb1 21 40 50u
:obciazenie fazy C
rc1 3 30 10
lc1 30 31 .2
cc1 31 40 50u
:przewod neutralny
r0 40 0 .1
*ac*print*re ira *im ira *re irb1 *im irb1 *re irc1 *im irc1 *re ir0 >
*im ir0
*run
:uklad z odlaczonym przewodem neutralnym
r0- : odlaczenie rezystancji przewodu neutralnego
*ac*print*re ira *im ira *re irb1 *im irb1 *re irc1 *im irc1
*run
*end
```

W wyniku przeprowadzenia obliczeń otrzymujemy

1PC-NAP *ac

date 94/04/15

time 16:07:38

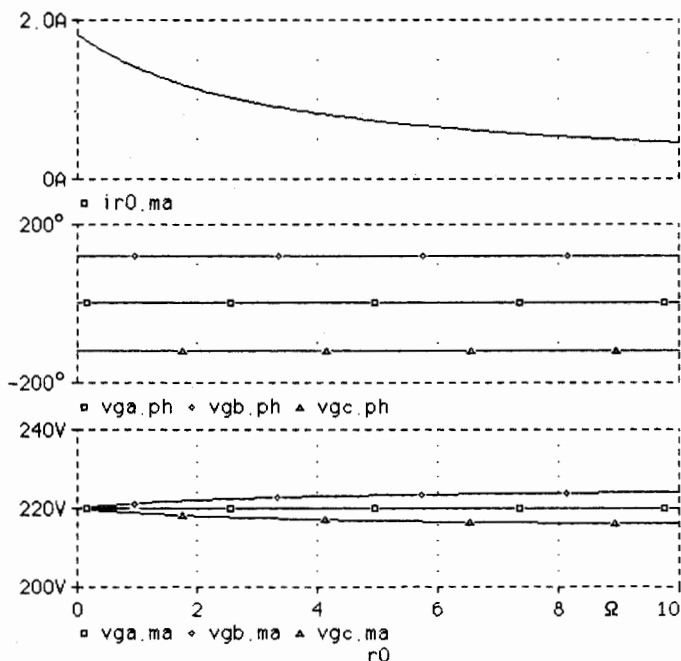
freq	ira.re	ira.im	irb1.re	irb1.im
ir0.re	ir0.im	irc1.re	irc1.im	
5.000000E+01	-2.265548E+03	-5.441323E+00	-3.434492E+01	1.620150E+01
2.200000E+03	0.000000E+00	-3.120338E+01	-2.164283E+01	

freq	ira.re	ira.im	irb1.re	irb1.im
irc1.re	irc1.im			
5.000000E+01	-6.554830E+01	-5.441323E+00	-3.434492E+01	1.620150E+01
-3.120338E+01	-2.164283E+01			

6.48. W układzie jak na rys. 6.44 wyznaczyć wpływ rezystancji przewodu neutralnego na wartość napięć na fazach odbiornika, jeśli w fazie A: $Z_A = 10 \Omega$.

ROZWIĄZANIE. Przy istniejącym systemie oznaczeń węzłów, aby określić napięcia na fazach odbiornika, dołączamy do każdej z faz rezystory określone przez konduktancje równe zeru, rezystancję R_0 zaś uzmienniamy. Otrzymujemy program o postaci niżej przedstawionej oraz wykresy pokazane na rys. 6.45.

```
*circuit
:obwod trojfazowy gwiazda - gwiazda
ra 1 0 0 ma=220 ph=0 :zasilanie fazy A
rb 2 0 0 ma=220 ph=120 :zasilanie fazy B
rc 3 0 0 ma=220 ph=-120 :zasilanie fazy C
.freq=50 :czestotliwosc zrodla
:obciazenie fazy A
ra1 1 40 10
ga 1 40 0 :nap. na fazie A vga
:obciazenie fazy B
rb1 2 20 10
lb1 20 21 .2
cb1 21 40 50u
gb 2 40 0 :nap. na fazie B vgb
:obciazenie fazy C
rc1 3 30 10
lc1 30 31 .2
cc1 31 40 50u
gc 3 40 0 :nap. na fazie C vgc
:przewod neutralny
r0 40 0 .1
*freq r0 0 10 .1
*ac*probe*ma vga *ph vga *ma vgb *ph vgb *ma vgc *ph vgc *ma ir0
*ph ir0
*run
*end
```



Rys. 6.45

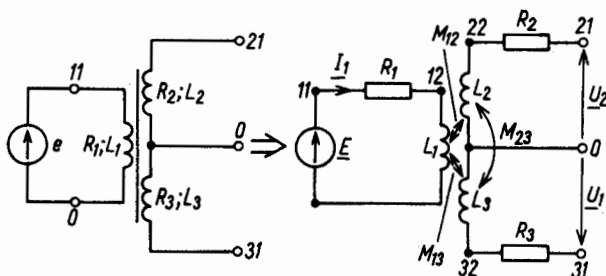
6.49. Zmodyfikować program analizy układu z rys. 6.44 (program do zadania 6.46) tak, aby można było obliczyć moduły i argumenty prądów fazowych oraz prądu neutralnego po zaistnieniu przerwy np. w fazie C.

Odpowiedź. Uzupełniając program opracowany w zadaniu 6.46 blokiem

```
rc1-
*ac*print*ma ira *ph ira *ma irb1 *ph irb1 *ma irc1 *ph irc1 *ma ir0
*ph ir0
*run
*end
```

włączonym po rozkazie *run, osiągniemy założony cel.

6.50. Na rysunku 6.46 przedstawiono schemat transformatora trójzwojowego. Opracować program symulacji ustalonych przebiegów prądów i napięć, jeśli transformator zasilamy ze źródła napięcia generującego sygnał $e = 220\sqrt{2} \sin \omega t$. Ponadto obliczyć napięcia na zaciskach wyjściowych transformatora. Dane: $R_1 = 0,1 \Omega$, $L_1 = 0,1 \text{ H}$, $R_2 = 0,1 \Omega$, $L_2 = 0,01 \text{ H}$, $R_3 = 0,1 \Omega$, $L_3 = 0,05 \text{ H}$, $f = 50 \text{ Hz}$. Przyjąć, że współczynnik sprzężenia pomiędzy każdą parą uzwojeń jest taki sam i równy 0,95.



Rys. 6.46

ROZWIĄZANIE. Program opisujący badany układ ma postać

```
*circuit
:transformator trojzwojowy
re 11 0 0 ma=220
r1 11 12 .1
l1 12 0 .1
l2 0 22 .01
r2 22 21 .1
l3 0 32 .05
r3 32 31 .1
:wsполczynnik sprzezenia k=.95
m13 l1 l2 -30m
m13 l1 l3 -67m
m23 l2 l3 -67m
.freq=50
*ac*print v11 *ma*ph v21 *ma*ph v31 *ma*ph ir1
*run
*end
```

Wyniki obliczeń są zamieszczone poniżej, przy czym należy uwzględnić, że $U_2 = v21$, zaś $U_1 = v31$.

1PC-NAP *ac

date 94/04/15

time 16:08:07

freq	v11	v21.ma	v21.ph	v31.ma
ir1.ph	v31.ph	ir1.ma		
5.000000E+01	2.200000E+02	6.599966E+01	1.823775E-01	1.473992E+02
-8.981762E+01	1.823775E-01	7.002782E+00		

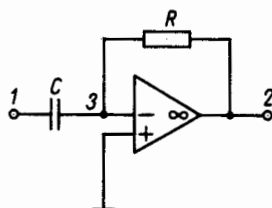
6.51. Wykorzystując program przedstawiony w zadaniu 6.50, wykonać analizę pracy transformatora i wyznaczyć charakterystyki $I_0(R_0)$, $I_1(R_0)$ oraz charakterystykę $I_0(I_1)$, przy czym rezystor R_0 jest dołączony do zacisków 21-31, a jego wartość zmienia się od 0 do 10 kΩ. Prąd I_0 jest prądem płynącym przez rezystor R_0 .

Odpowiedź. Modyfikując program z zadania 6.50, po zdaniu „freq = 50”, w następujący sposób:

```
r0 21 31 1 :dolaczenie rezystora R0
*freq r0 0 10k 50 :uzmiennienie rezystancji R0
*ac*probe *ma*ph ir0 *ma*ph ir1
*run
```

wyznaczymy charakterystyki $I_0(R_0)$ oraz $I_1(R_0)$. Wyznaczenie charakterystyki $I_0(I_1)$ umożliwia program graficzny probe.

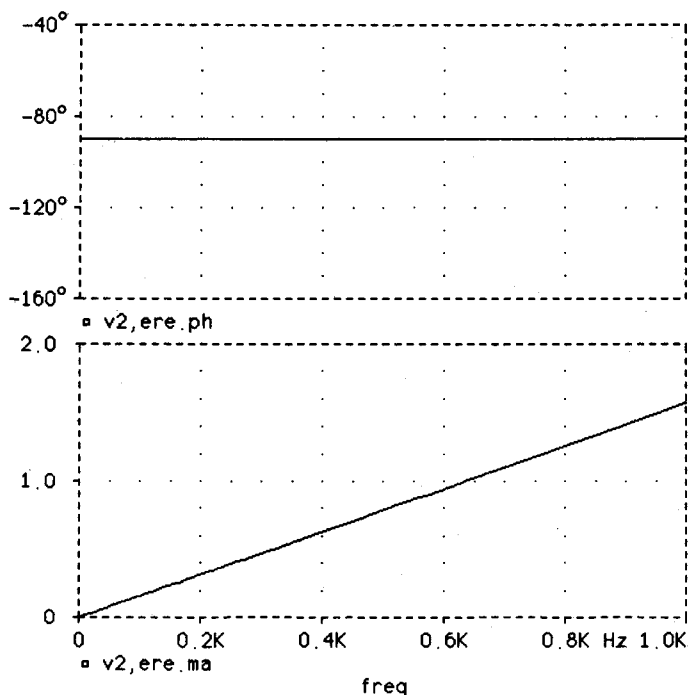
6.52. Na rysunku 6.47 jest przedstawiony układ różniczkujący. Wyznaczyć przebieg modułu i argumentu transmitancji napięciowej w funkcji częstotliwości. Dane: $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 25 \text{ }\mu\text{F}$.



Rys. 6.47

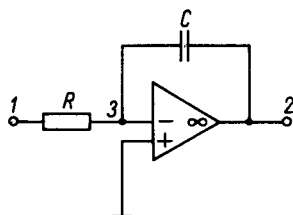
ROZWIĄZANIE. Program umożliwiający sporządzenie charakterystyki jest przedstawiony poniżej, natomiast na rys. 6.48 są pokazane obliczone przebiegi.

```
*circuit
:uklad rozniczujacy
re 1 0 0 ma=1
c 1 3 25u
r 3 2 10k
g 0 3 0
vop 0 2 10e8 vg :wzmacniacz operacyjny jako zrodlo sterowane
*freq 1 1k 10
*ac*probe *ma*ph v2/ere :transmitancja ukkladu, modul i argument
*run
*end
```



Rys. 6.48

6.53. Na rysunku 6.49 jest przedstawiony układ całkujący. Opracować program NAP umożliwiający wyznaczanie przebiegu modułu i argumentu transmitancji napięciowej w funkcji częstotliwości. Dane: $R = 20 \text{ k}\Omega$, $C = 20 \text{ }\mu\text{F}$.



Rys. 6.49

Odpowiedź. Tekst programu jest przedstawiony poniżej

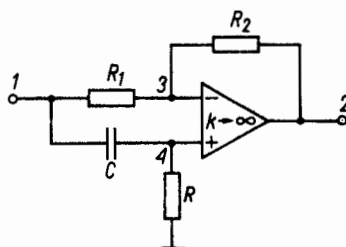
```
*circuit
:układ całkujący
re 1 0 0 ma=1
r 1 3 20k
c 3 2 20u
g 0 3 0
vop 0 2 10e8 vg :wzmacniacz operacyjny jako zrodło sterowane
```

```

*freq 1 1k 10
*ac*probe *ma*ph v2/ere :transmitancja układu, modul i argument
*run
*end

```

6.54. Na rysunku 6.50 jest przedstawiony schemat przesuwnika fazowego. Wyznaczyć kąt przesunięcia napięcia na wyjściu względem napięcia na wejściu w funkcji rezystancji rezystora R . Ponadto zbadać wpływ rezystancji R_1 na przebieg modułu napięcia na wyjściu układu, określonego w funkcji rezystancji rezystora R . Dane: $\underline{E} = 1 \text{ V}$, $f = 1 \text{ kHz}$, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$.



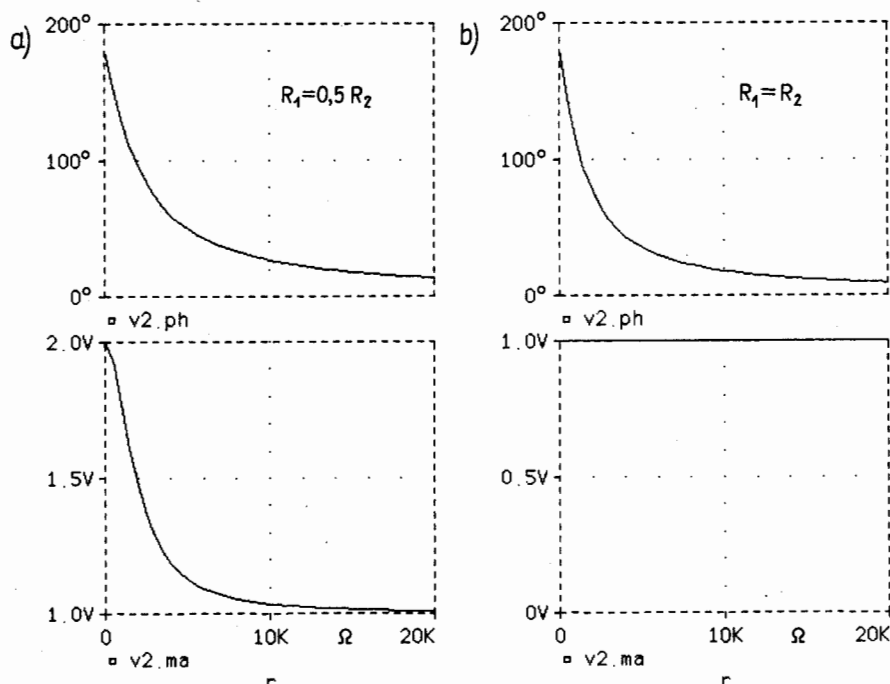
Rys. 6.50

ROZWIĄZANIE. Program analizy badanego układu jest przedstawiony poniżej, wyniki obliczeń zaś na rys. 6.51a i b. Obliczenia wykonano dla rezystancji $R_1 = 0,5 R_2$ (rys. 6.51a) i $R_1 = R_2$ (rys. 6.51b).

```

*circuit
:przesuwnik fazowy
.freq = 1k
re 1 0 0 ma = 1
r1 1 3 10k
r2 3 2 20k
c 1 4 100n
r 4 0 1k
g 4 3 0
vop 0 2 10e8 vg :wzmacniacz operacyjny jako zrodlo sterowane
*freq r 1 20k .5k
*ac*probe *ma*ph v2
*run
.r1 = 20k :modyfikacja danych
*freq r 1 20k .5k
*ac*probe *ma*ph v2
*run
*end

```



Rys. 6.51

6.3.4. Analiza obwodów w dziedzinie czasu

6.55. Dany jest obwód szeregowy RLC . Wyznaczyć przebieg prądu oraz napięcia na cewce i kondensatorze po założeniu źródła napięcia stałego $E = 1$ V. Obliczenia wykonać dla trzech przypadków: a) $R > R_{kr} = 2\sqrt{L/C}$, b) $R = R_{kr}$, c) $R < R_{kr}$. Dane: $L = 0,2$ H, $C = 0,2$ F.

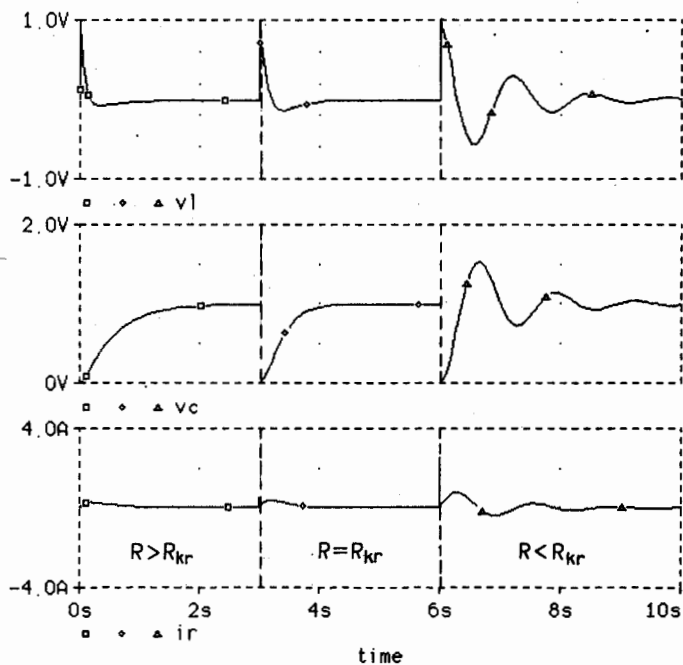
ROZWIĄZANIE. Dla założonej wartości indukcyjności i pojemności rezystancja krytyczna $R_{kr} = 2 \Omega$. Program analizy stanu nieustalonego składa się z trzech bloków realizujących obliczenia dla różnych rezystancji, przy czym w bloku drugim i trzecim zmianie ulega jedynie wartość rezystancji przez podstawienie odpowiednio: $r = 2$, $r = 4$. Tekst programu jest przedstawiony poniżej, wyniki zaś obrazują krzywe pokazane na rys. 6.52.

```
*circuit
:obwód szeregowy RLC wymuszenie stałe
:blok pierwszy
re 1 0 0 e=1
r 1 2 3 :rezystancja wieksza od rezystancji krytycznej
c 2 3 .2
```

```

I 3 0 .2
*time 0 3
*tr*probe vre ir vl vc
*run minstep 1e-3
:blok drugi
*reset
*modify v2=0
*modify il=0
.r=2 :rezystancja krytyczna
*time 3 6
*tr*probe vre ir vl vc
*run minstep 1e-3
:blok trzeci
*reset
*modify v2=0
*modify il=0
.r=.4 rezystancja mniejsza od rezystancji krytycznej
*time 6 10
*tr*probe vre ir vl vc
*run minstep 1e-3
*end

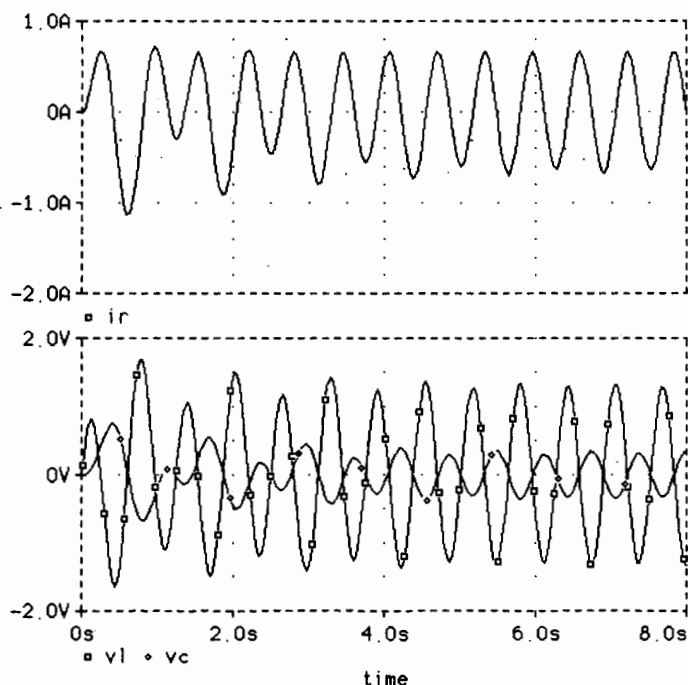
```



Rys. 6.52

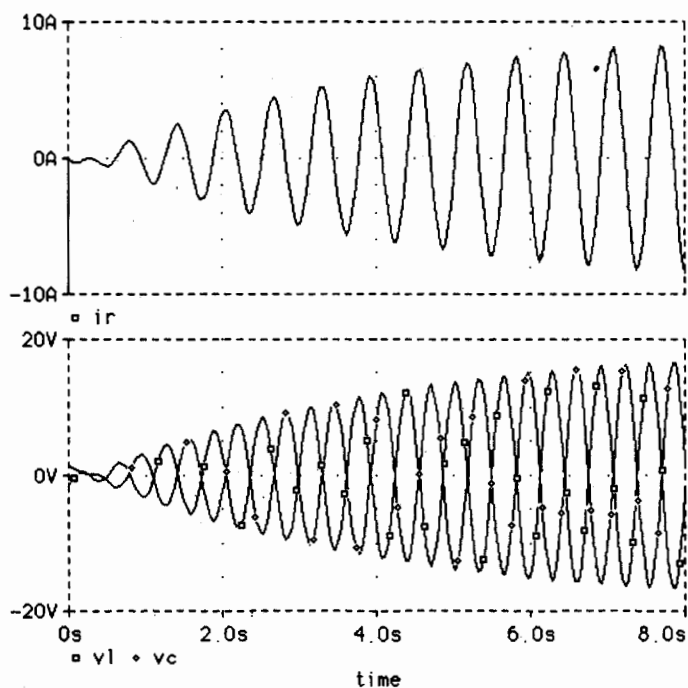
6.56. W obwodzie szeregowym RLC wyznaczyć przebieg prądu i napięcia na cewce i kondensatorze po załączeniu napięcia $e(t) = 1 \sin 10t$. Dobierając parametry elementów obwodu, wyznaczyć przebiegi dla czterech przypadków: a) $R \ll R_{kr}$, $\omega > \omega_0$; b) $R \ll R_{kr}$, $\omega = \omega_0$; c) $R \ll R_{kr}$, $\omega \approx \omega_0$; d) $R \ll R_{kr}$, $\omega < \omega_0$; gdzie ω_0 — pulsacja drgań własnych obwodu.

Odpowiedź. Program analizy obwodu jest przedstawiony poniżej, wyniki zaś odpowiednio na rys. 6.53 ÷ 6.56.

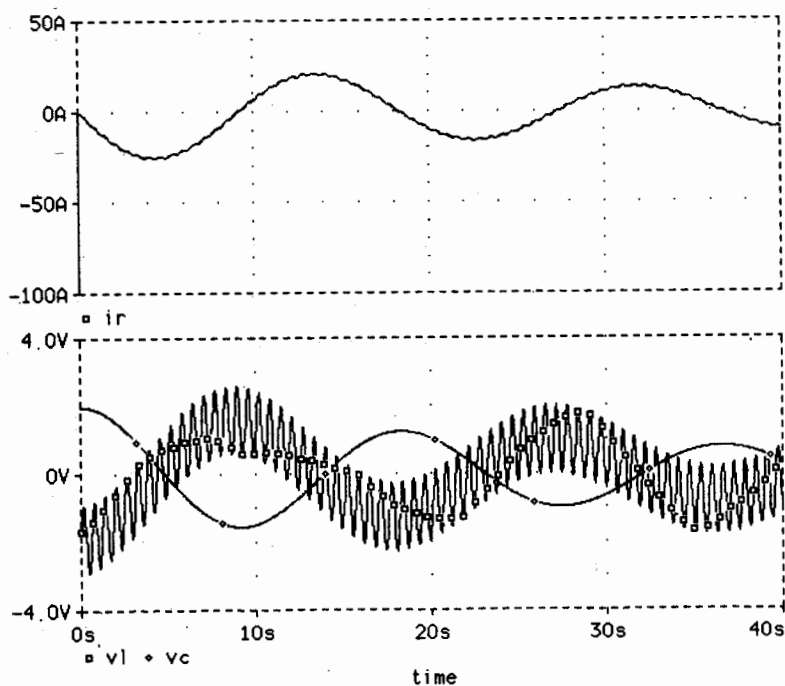


Rys. 6.53

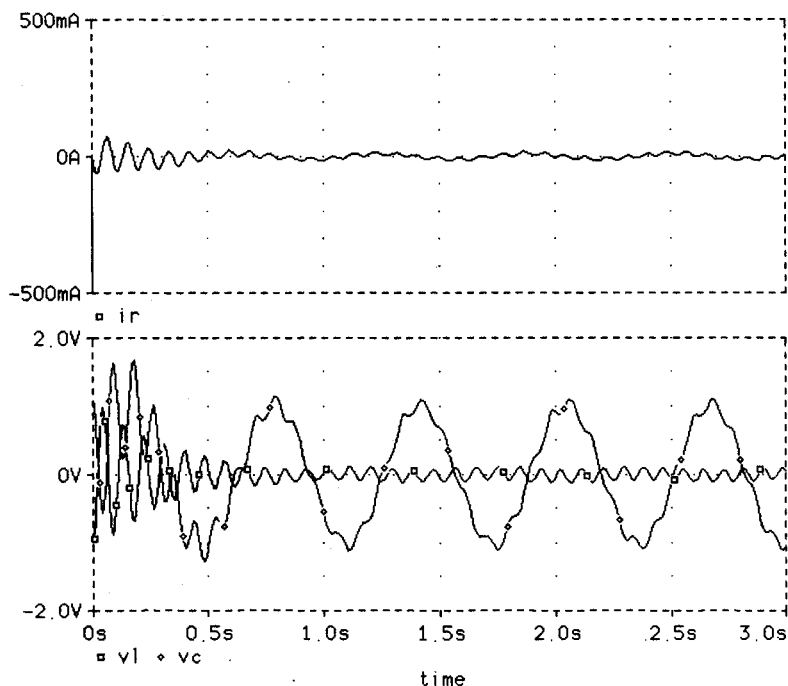
```
*circuit
:obwód szeregowy RLC, wymuszenie sinusoidalne
:omega wieksza od omega(0)
sin/sin/
re 1 0 0 e=1*sin(10*time)
r 1 2 .2
c 2 3 .2
l 3 0 .2
*time 0 8
*tr*probe vre ir vl vc
*run minstep 1e-3
:omega rowna omega(0)
*reset
```



Rys. 6.54



Rys. 6.55



Rys. 6.56

```

*modify il=0
*modify v2=0
.r=.1
.c=.05
*time 0 8
*tr*probe ir vl vc
*run minstep 1e-3
:omega bliskie omega(0)
*reset
*modify v2=0
*modify il=0
.r=.01
.c=.042
*time 0 40
*tr*probe ir vl vc
*run
:omega mniejsza od omega(0)
*reset
*modify v2=0
*modify il=0
.r=1
.c=1m

```

```

*time 0 3
*tr*probe ir vl vc
:run minstep 1e-3
*end

```

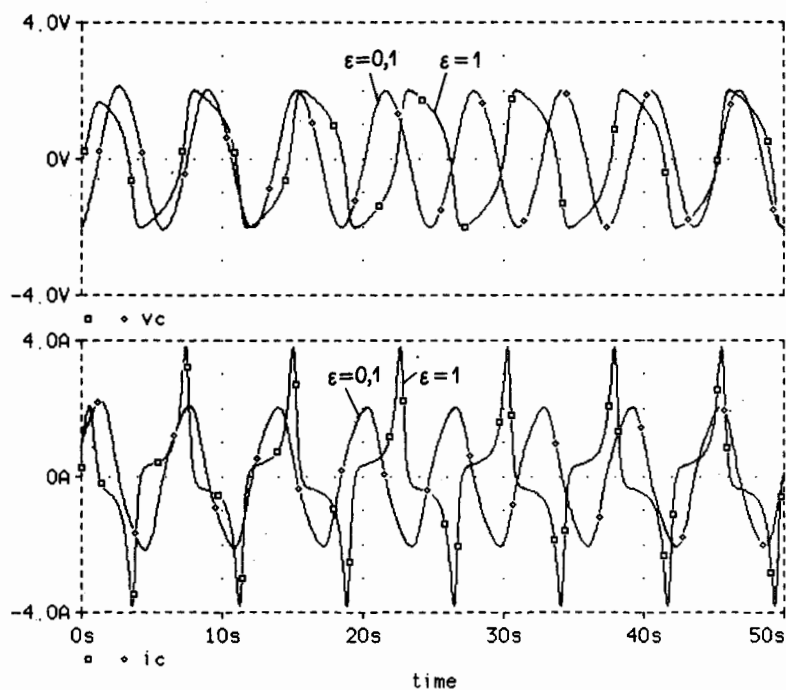
6.57. W zadaniu 6.32 określiliśmy strukturę obwodu będącego modelem obwodowym równania van der Pola (rys. 6.30). Wykorzystując ten obwód oraz program NAP, wyznaczyć przebieg funkcji $x(t)$ i trajektorii fazowej dla dwóch parametrów ε : $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0,1$. Przyjąć, że parametr $a = 1$.

ROZWIĄZANIE. Program analizy układu z rys. 6.30 jest przedstawiony poniżej, przy czym pierwszy blok dokładnie symuluje strukturę tego układu, drugi zaś blok zmodyfikowano eliminując źródła v_1 oraz v_2 i uzależniając współczynnik wzmocnienia od iloczynu $.1*vc*vc$. Eliminacja taka jest możliwa w przypadku posługiwania się wersją programu NAP, w której wzmocnienie źródła sterowanego może być uzależnione funkcjonalnie od prądów i napięć na elementach. Na rysunku 6.57 i 6.58 pokazano przykładowe przebiegi dla obu współczynników ε , przy czym zmiennej x odpowiada napięcie na kondensatorze (vc).

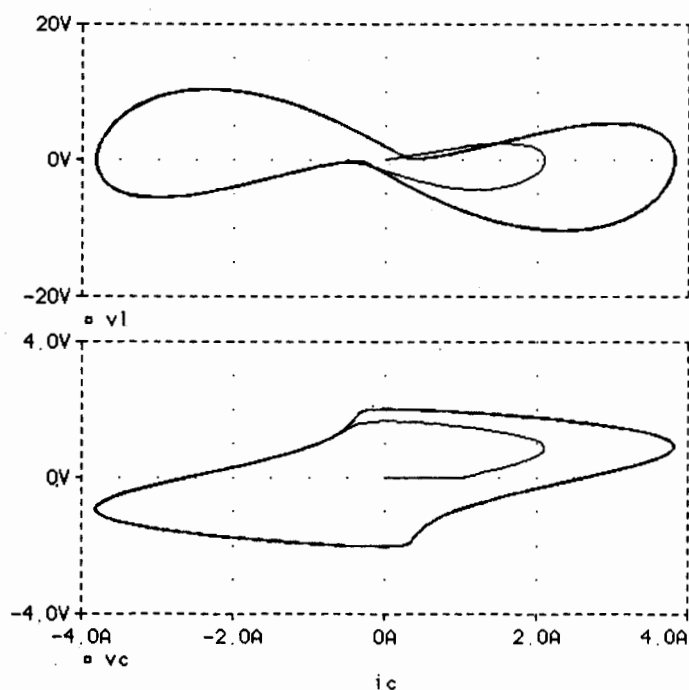
```

*circuit
:rozwiązanie rownania van der Pola
:epsilon=1
l 0 1 1
*modify il=1
re 1 2 -2
c 2 3 1
v1 5 0 2 vc
g1 5 0 0
v2 6 0 1*vc vg1
g2 6 0 0
v 3 0 1*vg2 ic
*time 0 50
*tr *probe ic vc vl vre
*run minstep 1e-3
:epsilon=.1
*modify il=1
v1 -;g1 -;v2 -;g2 - ;usuniecie zrodel v1 i v2 oraz konduktorow g1 i g2.
.v 3 0 .1*vc*vc ic
.re = -.1
*time 0 50
*tr *probe ic vc vl vre
*run minstep 1e-3
*end

```



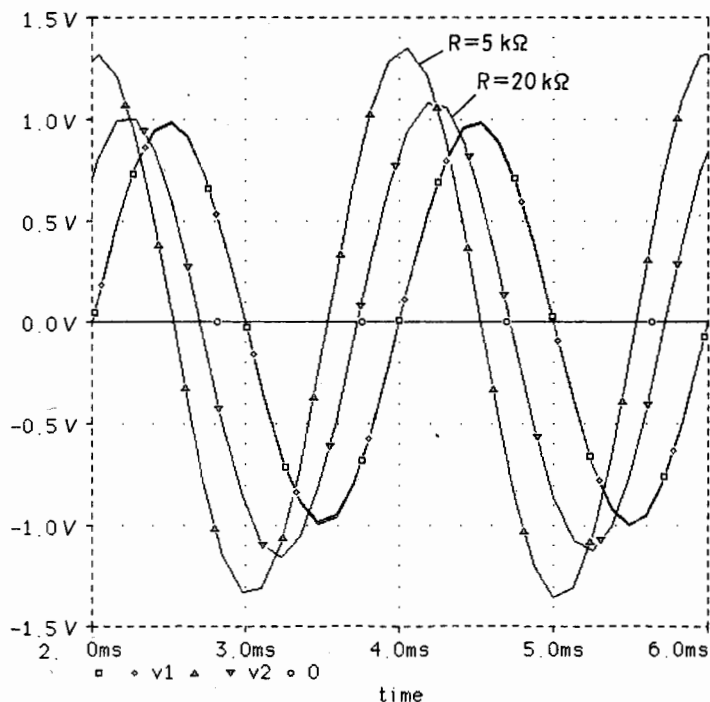
Rys. 6.57



Rys. 6.58

6.58. Rozwiązując zadanie 6.54, wyznaczyliśmy przesunięcie fazowe pomiędzy sygnałami na jego wejściu (napięcie v_1) i wyjściu (napięcie v_2) w funkcji zmian wartości rezystancji rezystora R . Wykorzystując opracowany dla tego celu program, przekształć go tak, aby stworzyć możliwość pokazania kąta przesunięcia fazowego pomiędzy sygnałami sinusoidalnie zmiennymi w funkcji czasu dla dwóch różnych rezystancji rezystora: $R = 5 \text{ k}\Omega$ oraz $R = 20 \text{ k}\Omega$.

Odpowiedź. Program realizujący cele określone w zadaniu jest przedstawiony poniżej, przebiegi zaś na rys. 6.59.



Rys. 6.59

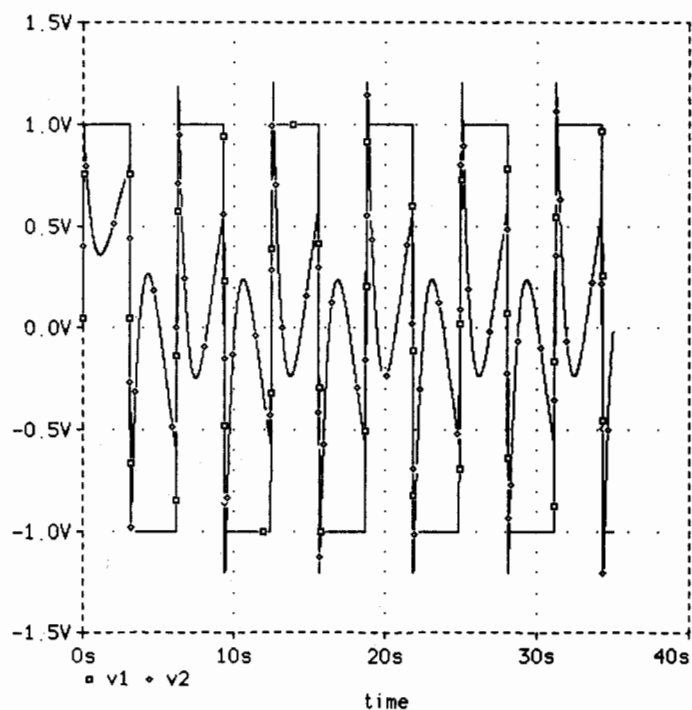
```
*circuit
:przesuwnik fazowy (rys. 6.50)
sin/sin/
re 1 0 0 e=1*sin(1000pi*time)
r1 1 3 10k
r2 3 2 20k
c 1 4 100n
r 4 0 5k
g 4 3 0
vop 0 2 10e8 vg :wzmacniacz operacyjny jako zrodlo sterowane
*time 0 8m
*tr*probe v1 v2 :v1 — napiecie na wejsci, v2 — napiecie na wyjsci
*run
```

```
.r=20k
*time 0 8m
*tr*probe v1 v2
*run
*end
```

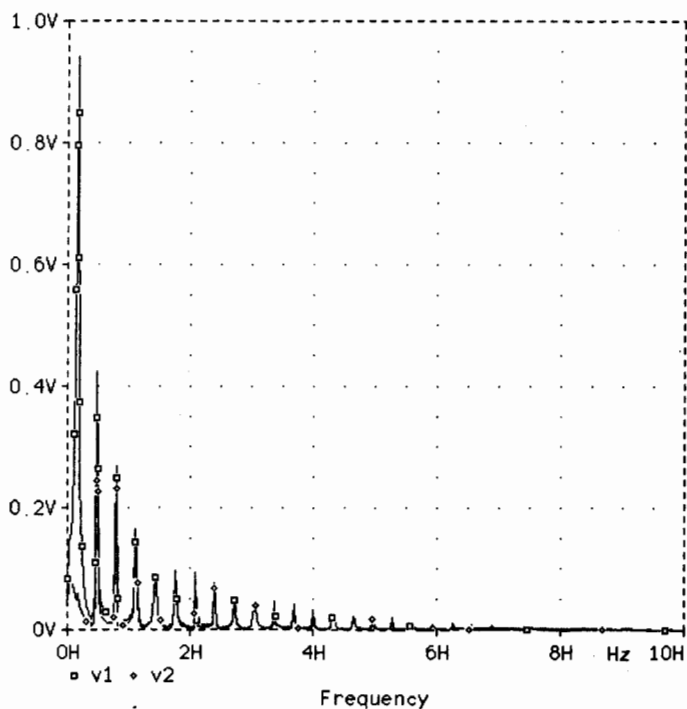
6.59. Na rysunku 3.58a jest pokazany schemat filtru zaporowego. Korzystając z danych określonych w zadaniu 3.73, wyznaczyć napięcie na zaciskach wyjściowych filtru zasilanego napięciem prostokątnym, a następnie napięciem zawierającym cztery pierwsze harmoniczne napięcia prostokątnego. W obu przypadkach dobrać tak częstotliwość sygnału prostokątnego, by była równa częstotliwości zaporowej ($f = 0,16 \text{ Hz}$). Ponadto, wykorzystując możliwości programu graficznego probe, dokonać analizy widmowej sygnału wejściowego i wyjściowego.

ROZWIĄZANIE. Program określonych w zadaniu analiz jest przedstawiony poniżej, jej wyniki zaś na rys. 6.60 ÷ 6.63, przy czym na rys. 6.60 i 6.61 są pokazane przebiegi odpowiadające wymuszeniu na wejściu napięcia prostokątnego, a na rys. 6.62 i 6.63 — przebiegi odpowiadające wymuszeniu na wejściu napięcia $v1 = 1,27 \sin(0,32\pi t) + 0,42 \sin(0,96\pi t) + 0,254 \sin(1,6\pi t) + 0,18 \sin(2,24\pi t)$ — zawierającego pierwszą, trzecią, piątą i siódmą harmoniczną przebiegu prostokątnego. Wyniki analizy widmowej potwierdzają zaporowe właściwości filtru.

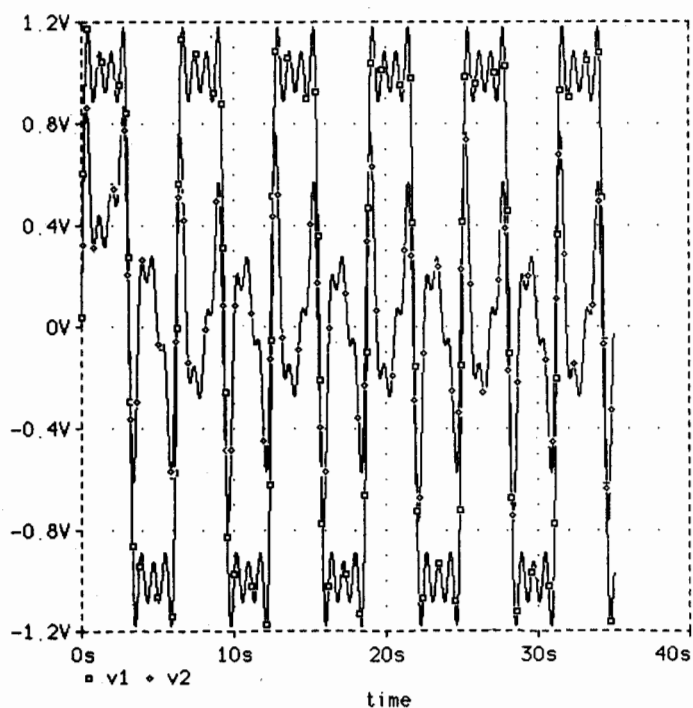
```
*circuit
:zasilanie napięciem prostokątnym (rys. 6.60 i 6.61)
f1/tab2/ p=6.24 0 0 .06 1 3.06 1 3.12 0 3.18 -1 6.18 -1 6.24 0
re 1 0 0 e=1*f1(time)
c1 1 3 1
c2 3 4 1
g3 3 2 2.12
g1 1 5 1.41
g2 5 4 .707
c3 5 0 2
g 4 0 0
v 2 0 1 vg :wzmacniacz napięcia
*time 0 35 1e-2
*tr*probe v1 v2 :v1 — napięcie wejściowe, v2 — napięcie wyjściowe
*run
*circuit
:zasilanie czterema pierwszymi harmonicznymi (rys. 6.62 i 6.63)
sin/sin/
re1 1 10 0 e=1.27*sin(.32pi*time) :pierwsza harmoniczna
re3 10 11 0 e=.42*sin(.96pi*time) :trzecia harmoniczna
re5 11 12 0 e=.254*sin(1.6pi*time) :piąta harmoniczna
```



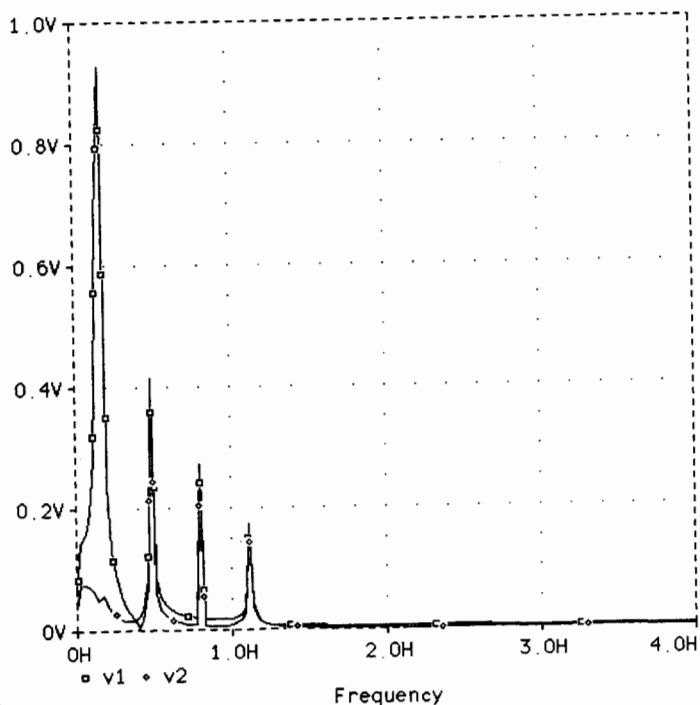
Rys. 6.60



Rys. 6.61



Rys. 6.62



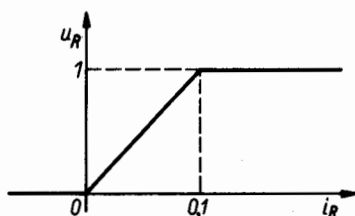
Rys. 6.63

```

re7 12 0 0 e=.18*sin(2.24pi*time) :siodma harmoniczna
c1 1 3 1
c2 3 4 1
g3 3 2 2.12
g1 1 5 1.41
g2 5 4 .707
c3 5 0 2
g 4 0 0
v 2 0 1 vg
*time 0 35 1e-2
*tr*probe v1 v2 :v1 — napięcie wejściowe, v2 — napięcie wyjściowe
*run
*end

```

6.60. Na rysunku 6.64 przedstawiono charakterystykę nieliniowego rezystora. Wiedząc, że jest on elementem obwodu szeregowego RLC zasilanego ze źródła napięcia sinusoidalnie zmiennego, opracować program umożliwiający wyznaczenie prądu i napięć na poszczególnych elementach dla dwóch różnych amplitud napięcia wymuszającego. Dane: $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 0,2 \text{ F}$, $f = 1 \text{ Hz}$.



Rys. 6.64

ROZWIĄZANIE. Program analizy jest zamieszczony poniżej. W programie tym element nieliniowy jest modelowany przez źródło napięcia uzależnione funkcjonalnie od płynącego prądu (element rn). Charakterystyka tego elementu jest opisana funkcją f1 będącą tabelarycznym zapisem zadanej krzywej. Na rysunku 6.65a przedstawiono wykres komputerowy charakterystyki nieliniowego elementu, tożsamy z charakterystyką zadaną (rys. 6.64), a na rys. 6.65b — wybrane przebiegi otrzymane w wyniku przeprowadzonych obliczeń.

```

*circuit
:obwód nieliniowy 1
f1/tab2/ -1 0 0 0 .1 1 1 1 :charakterystyka elementu niel.
sin/sin/
re 1 0 0 e = .5*sin(2pi*time)
rn 1 2 0 e = 1*f1(irn) :modelowanie elementu nieliniowego

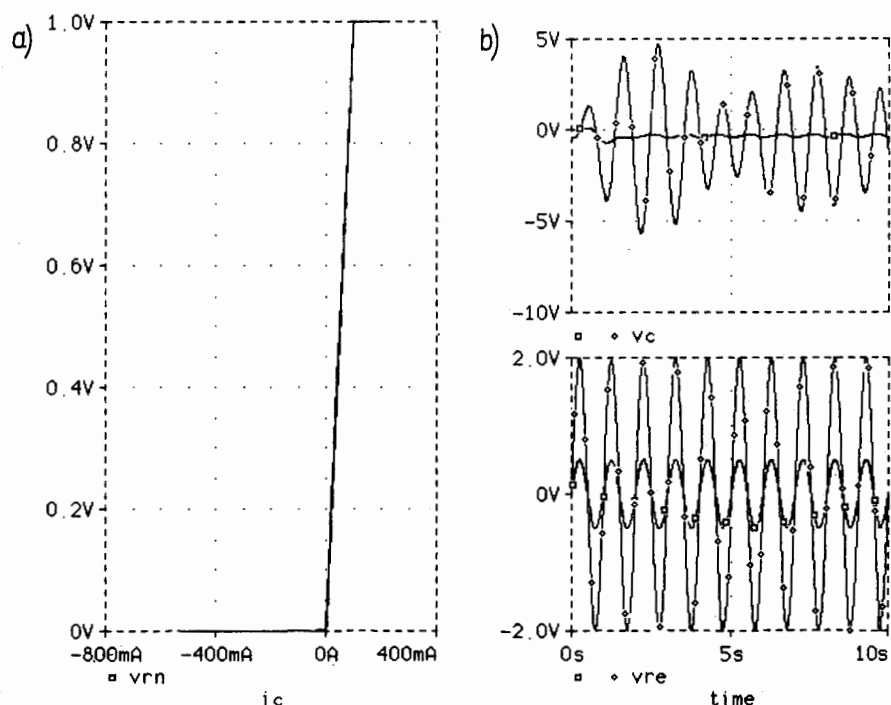
```



```

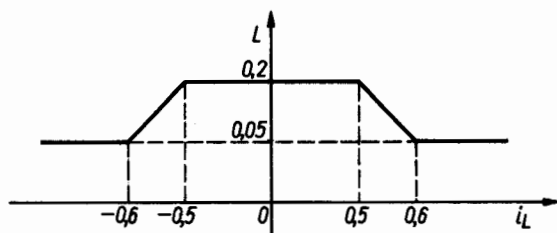
c 2 3 .2
l 3 0 .2
*time 0 10
*tr*probe vre vrn ic vl vc
*run minstep 1e-3
*reset
*modify v2 = 0
*modify il = 0
.re 1 0 0 e = 2*sin(2pi*time) :zmiana amplitudy napiecia wymuszajacego
*time 0 10
*tr*probe vre vrn ic vl vc
*run minstep 1e-3
*end

```



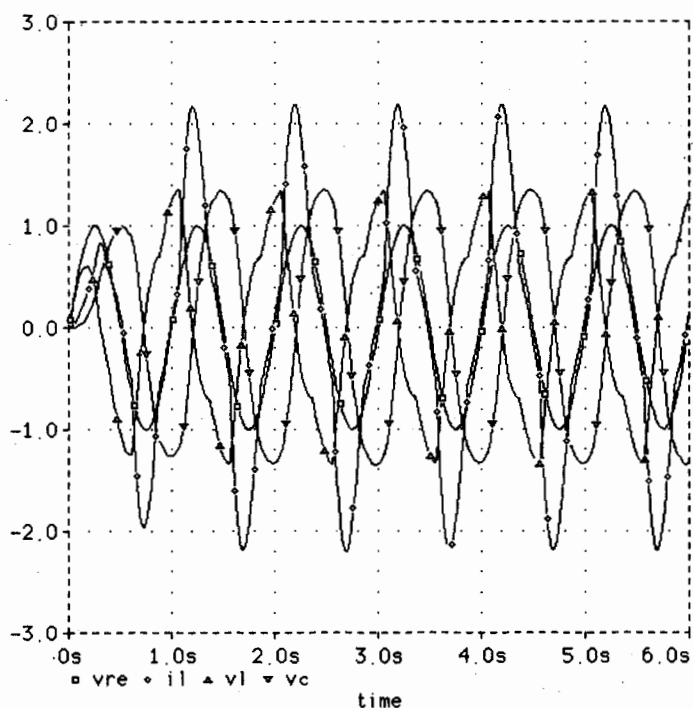
Rys. 6.65

6.61. Przybliżając charakterystykę określającą zmienność w funkcji prądu indukcyjność cewki nawiniętej na rdzeń ferromagnetyczny, krzywą przedstawioną na rys. 6.66 oraz zakładając, że jest ona elementem obwodu szeregowego RLC, wyznaczyć prąd, napięcia na cewce i kondensatorze po załączeniu w chwili $t=0$ źródła napięcia sinusoidalnie zmiennego w funkcji czasu. Dane: $R = 0,5 \Omega$, $C = 0,2 \text{ F}$, $e = \sin 2\pi t$.



Rys. 6.66

ROZWIĄZANIE. Funkcja f_1 w przedstawionym niżej programie opisuje zmienność indukcyjności. Nieliniową indukcyjność modelowano elementem indukcyjnym, w którym uzmienniono jego wartość przez wyrażenie $1 * f_1(i_L)$. Na rysunku 6.67 przedstawiono wybrane przebiegi dokonanej analizy.



Rys. 6.67

```
*circuit
:obwód nieliniowy z nieliniową cewką
f1/tab2/ -1 .05 -.6 .05 -.5 .2 0 .2 .5 .2 .6 .05 1 .05 :niel. induk.
sin/sin/
re 1 0 0 e=1*sin(2pi*time)
r 1 2 .5
c 2 3 .2
```

I 3 0 1*f1(il) :nieliniowa indukcyjnosc

*time 0 6

*tr*probe vre il vl vc

*run minstep 1e-3

*end

6.62. Program o postaci

*circuit

:obwod nieliniowy 3 (drgania chaotyczne)

g 2 0 -.2

r 3 1 -.1

f/tab2/ -6 0 -3 4.13 -1 3.5 0 0 1 -3.5 3 -4.13 6 0

gi 1 0 0

ri 1 4 0

ign 4 0 1*f(vgi)

c2 2 0 -6.42

I 2 3 .421

c1 1 0 1

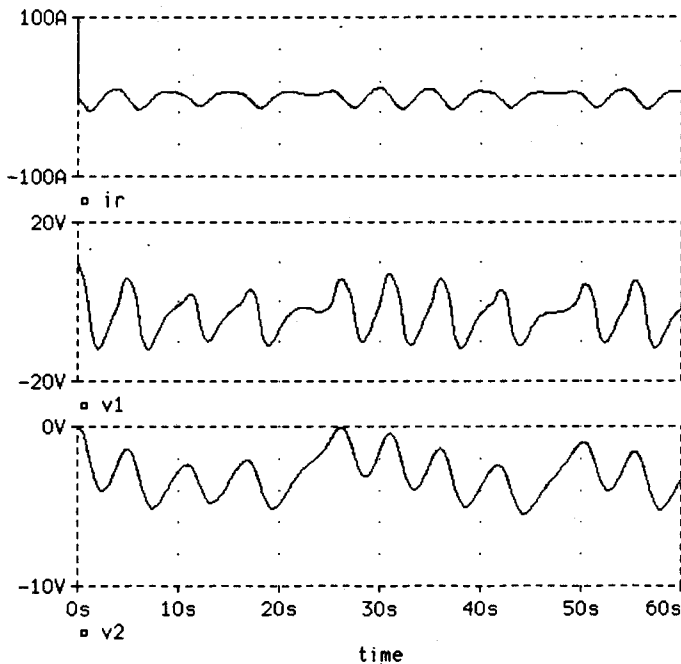
*modify v1 10

*time 0 60

*tr *probe v2 v1 ir iri vign

*run minstep 1e-3

*end

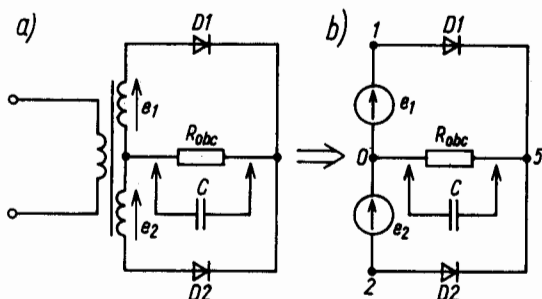


Rys. 6.68

opisuje obwód nieliniowy generujący tzw. drgania chaotyczne, w których przebiegu w funkcji czasu brak jest jakiegokolwiek prawidłowości. Na rys. 6.68 są przedstawione przykładowe przebiegi obrazujące charakter tych drgań. Znając treść programu, odtworzyć strukturę obwodu oraz narysować charakterystykę elementu nieliniowego i omówić sposób jego zamodelowania.

Odpowiedź. Strukturę obwodu można odtworzyć dołączając do węzłów $0 \div 4$ wskazane w programie elementy, natomiast charakterystyka elementu nieliniowego jest opisana funkcją f w postaci tablicy tab2. Modelem elementu nieliniowego jest źródło prądu sterowane napięciem na tym źródle występującym.

6.63. Na rysunku 6.69a jest przedstawiony układ prostowania dwupołowego z transformatorem trójzwojowym. Przybliżając ten układ obwodem pokazanym na rys. 6.69b, opracować program analizy umożliwiający wyznaczenie charakterystycznych przebiegów dla dwóch przypadków obciążeń: a) obciążeniem jest rezystor $R_{obc} = 1 \text{ k}\Omega$, b) do elementu R_{obc} dołączono równolegle kondensator $C = 100 \mu\text{F}$. Przyjąć, że amplituda napięcia po stronie wtórnej transformatora jest równa 100 V oraz zastosować diody typu BAY95.



Rys. 6.69

ROZWIĄZANIE. Dioda BAY95 jest elementem biblioteki lib1. Można więc, przy konstruowaniu programu korzystać z tej biblioteki. Sposób posługiwania się elementem bibliotecznym wynika z analizy przedstawionego niżej programu. Na rysunku 6.70a i b przedstawiono przykładowe przebiegi, charakterystyczne dla danego układu.

*circuit

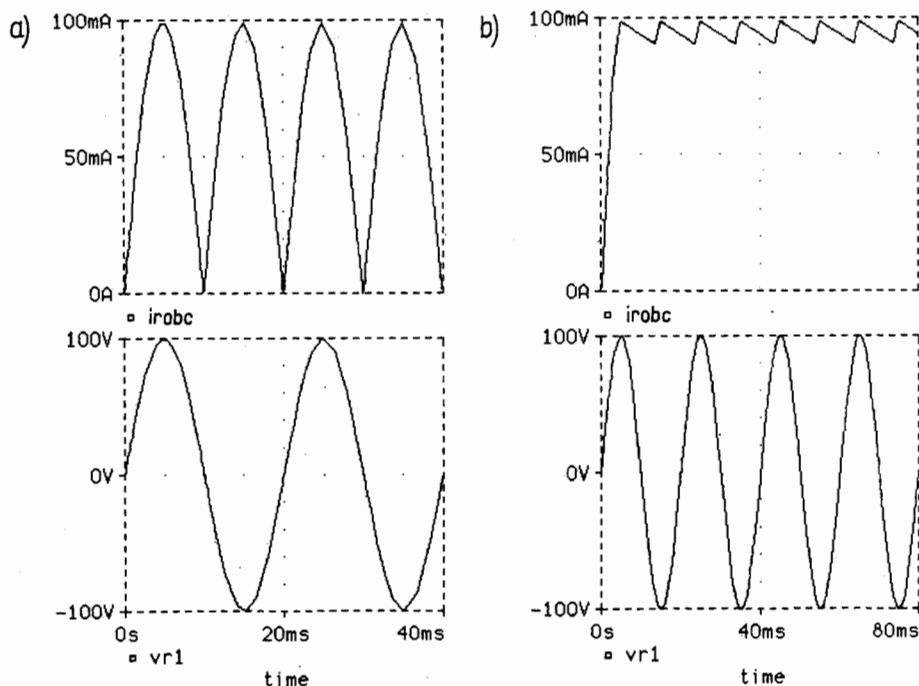
:układ prostowniczy dwupolowkowy

*lib1 bay95 : dioda biblioteczna

```

sin/sin/
r1 1 0 0 e=100*sin(100pi*time) :zrodlo e1
r2 0 2 0 e=100*sin(100pi*time) :zrodlo e2
t1 1 5 bay95 :dioda d1
t2 2 5 bay95 :dioda d2
robc 5 0 1k :obciazenie
*time 0 .08
*tr *probe vr1 ir1 ir2 v5 irobc
*run minstep 1e-4
c 5 0 100u :dolaczenie kondensatora
*time 0 .08
*tr *probe vr1 v5 ic irobc ir1 ir2
*run minstep 1e-4
*end

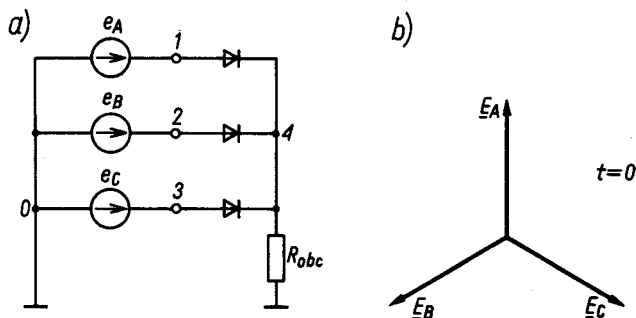
```



Rys. 6.70

6.64. Układ przedstawiony na rys. 6.71a jest klasycznym, jednopółwukowym, trójfazowym układem prostowniczym. Opracować program jego analizy w dziedzinie czasu. Przyjąć, że układ prostowniczy jest zasilany z symetrycznego, trójfazowego źródła napięcia, którego amplituda $E_m = 311$ V (wartość skuteczna $E = 220$ V), a gwiazda napięć dla chwili $t = 0$ jest położona jak

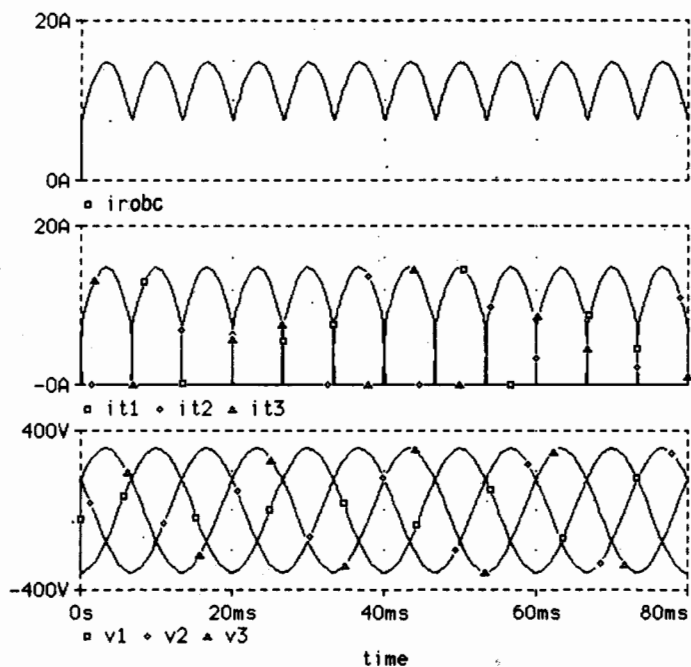
na rys. 6.71b. Obciążeniem układu jest rezystor $R_{obc} = 20 \Omega$. Obliczenia wykonać dla dwóch przypadków: a) praca układu w strukturze z rys. 6.71a, b) przerwa w fazie A.



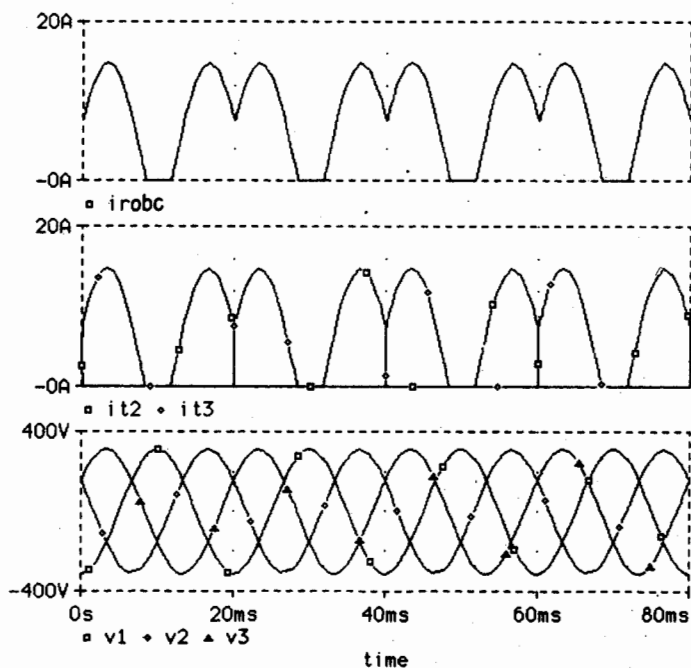
Rys. 6.71

ROZWIĄZANIE. W tym przypadku skorzystamy z modelu diody będącej elementem wbudowanym programu NAP. Sposób powoływania się na element wbudowany wynika z analizy przedstawionego niżej programu. Na rysunkach 6.72 i 6.73 pokazano charakterystyczne przebiegi obrazujące kolejno obydwa przypadki.

```
*circuit
:trojfazowy układ prostowniczy
d/diode/ :dioda jako element wbudowany
f1/sin/ d=90°
f2/sin/ d=210°
f3/sin/ d=-30°
ra 1 0 0 e=311*f1(100pi*time) :zrodlo ea
rb 2 0 0 e=311*f2(100pi*time) :zrodlo eb
rc 3 0 0 e=311*f3(100pi*time) :zrodlo ec
t1 1 4 d :dioda d1
t2 2 4 d :dioda d2
t3 3 4 d :dioda d3
robc 4 0 20 :obciazenie
*time 0 .08
*tr *probe v1 v2 v3 it1 it2 it3 v4 irobc
*run minstep 1e-4
t1 - :przerwa w fazie a
*time 0 .08
*tr *probe v1 v2 v3 it2 it3 v4 irobc
*run minstep 1e-4
*end
```



Rys. 6.72



Rys. 6.73



Literatura

-
1. Bolkowski St.: *Teoria obwodów elektrycznych*. Wyd. 7. Warszawa, WNT 2003.
 2. Cichocki A., Mikołajuk K., Osowski St., Trzaska Z.: *Zbiór zadań z teorii obwodów*. Warszawa, PWN 1985.
 3. Cichocki A., Osowski St., Rawa H.: *Podstawy elektrotechniki*. Warszawa, WPW 1978.
 4. Cichowska Z., Pasko M.: *Przykłady i zadania z elektrotechniki teoretycznej*. T. I i II. Gliwice, Wyd. Politechniki Śląskiej 2000.
 5. Krakowski M.: *Elektrotechnika teoretyczna, obwody liniowe i nieliniowe*. Warszawa, PWN 1996.
 6. Mikołajuk K.: *Podstawy analizy obwodów energoelektronicznych*. Warszawa, PWN 1998.
 7. Osiowski J., Szabatin J.: *Podstawy teorii obwodów*. Tom I 2000, Tom II 2001. Warszawa, WNT.
 8. Osowski St., Tobała A.: *Analiza i projektowanie komputerowe obwodów z zastosowaniem języków MATLAB I PCNAP*. Warszawa, WPW 1995.
 9. Rawa H.: *Podstawy elektromagnetyzmu*. Warszawa, WPW 1996.
 10. Rawa H., Siwiński M.: *Zbiór zadań z podstaw elektrotechniki*. Warszawa, WSiP 1995.
 11. *Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej*. Praca zbiorowa. Warszawa, WNT 1985.



WNT. Warszawa 2003
Wyd. V. Ark. wyd. 18,8. Ark. druk. 22,25
Symbol En/83865/WNT
Drukarnia Wydawnictw Naukowych SA